U d'/of OTTAWA
39003006471196

ŒUVRES SCIENTIFIQUES

DE

L. LORENZ

REVUES ET ANNOTÉES

PAR

H. VALENTINER

PUBLIÉES AUX FRAIS DE LA FONDATION CARLSBERG

TOME SECOND

DEUXIÈME FASCICULE

COPENHAGUE

LIBRAIRIE LEHMANN & STAGE

IMPRIMERIE DE BIANCO LUNO

1904

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10003

JOHNSON REPRINT COMPANY LIMITED
Berkeley Square House, London, W. 1

UNIVERSITAS SCIENTIAE

First reprinting, 1965, Johnson Reprint Corporation

Printed in the United States of America

Q
113
.L670
#2
1904

TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

Mémoire sur la théorie de l'élasticité des corps homogènes à élasticité constante, p. 1.

Sur le nombre des molécules contenues dans un milligramme d'eau, p. 47.

Détermination du degré de chaleur en mesures absolues, p. 55.

La résistance électrique du mercure en mesures absolues, p. 85.

Sur les méthodes à employer pour la détermination de l'ohm, p. 117.

Détermination de la résistance électrique du mercure en mesures électromagnétiques absolues, p. 129.

Sur la propagation de l'électricité, p. 183.

Sur les conductibilités électrique et calorifique des métaux, p. 241.

Sur le développement des fonctions au moyen d'intégrales définies, p. 317.

Un théorème sur la fonction potentielle, p. 331.

Sur l'évaluation des aires, p. 357.

Sur le mouvement permanent d'un liquide, p. 367.

Sur la résolution des équations algébriques au moyen de séries et d'intégrales définies, p. 385.

Contribution à la la théorie des nombres, p. 401.

Sur la compensation des erreurs d'observation, p. 433.

Sur la réduction du facteur enlérien, p. 467.

Équations cinétiques fondamentales d'un système de points, p. 483.

Sur le développement des fonctions arbitraires au moyen de fonctions données, p. 493.

Sur les nombres premiers, p. 521.

Recherches analytiques sur les nombres de nombres premiers, p. 531.

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE

DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS HOMOGÈNES

A ÉLASTICITÉ CONSTANTE.

Digitized by the Internet Archive
in 2012 with funding from
University of Toronto

http://www.archive.org/details/oeuvresscientifi02lore

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS HOMOGÈNES A ÉLASTICITÉ CONSTANTE.* * NOTE 1.

JOURNAL DE CRELLE T. LVIII, P. 328—351.

Nous désignons par N_1, N_2, N_3 et T_1, T_2, T_3 les composantes normales et tangentielles, rapportées à l'unité de surface, de la force élastique exercée sur les trois plans perpendiculaires aux coordonnées rectangulaires x, y et z; par u, v, w les projections sur les axes coordonnés du déplacement d'un point matériel (x, y, z); par ρ la densité du milieu, par X, Y, Z les composantes des forces accélératrices qui pourraient agir sur l'élément de la masse.

Les équations qui servent comme point de départ dans les problèmes que je me propose de résoudre donnent pour les forces élastiques les valeurs

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$T_2 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$T_3 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

dans lesquelles λ et μ sont des constantes, et θ est la dilatation, exprimée par

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

De ces six équations, en posant

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

on déduit dans le cas de l'équilibre d'élasticité:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta^2 u + \rho X &= 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta^2 v + \rho Y &= 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta^2 w + \rho Z &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

et dans le cas du mouvement:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta^2 u + \rho X &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta^2 v + \rho Y &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta^2 w + \rho Z &= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

1.

Elimination des forces accélératrices.

Les fonctions u, v, w se composent de deux espèces de termes dont les uns, que nous désignons par u_0, v_0, w_0 font disparaître les composantes des forces accélératrices X, Y, Z; les autres forment les intégrales générales des équations (1) et (2), ces forces étant nulles. Nous ferons

donc voir que l'on pourra toujours déterminer les fonctions u_0, v_0, w_0, les X, Y, Z étant des fonctions connues quelconques; et, pour généraliser le problème, nous supposerons que ces forces sont aussi des fonctions du temps t, ce que nous indiquerons en ajoutant un t sous le signe de ces fonctions.

En effectuant les différentiations, on vérifie aisément l'équation

$$a^2 \Delta^2 \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}, \tag{3}$$

où a est une constante, $\varphi(t)$ une fonction quelconque de t, α, β, γ et r égal à

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

Cela posé considérons l'intégrale

$$\int d\varpi \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r},$$

$d\varpi$ désignant l'élément de volume $d\alpha \cdot d\beta \cdot d\gamma$ et l'intégration se rapportant à un espace quelconque. En appliquant à cette intégrale les deux opérations $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ et Δ^2 on trouve

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d\varpi \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} = \int d\varpi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}, \tag{3a}$$

$$\Delta^2 \int d\varpi \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} = \int d\varpi \Delta^2 \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}. \tag{3b}$$

Mais l'équation (3b) n'est exacte que dans le cas où le point (x, y, z) se trouve en dehors des limites de l'intégration relative à α, β, γ. Dans le cas contraire, il existe des éléments infinis sous l'intégrale, r pouvant s'évanouir, et la différentiation sous l'intégrale cesse d'être permise.

On trouve aisément la modification que l'équation (3b) subit alors en considérant l'intégrale

$$\int d\varpi \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \varphi(t)}{r}.$$

L'expression à intégrer ne devient plus infinie lorsque r s'évanouit. On a donc

$$\Delta^2 \int d\varpi \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \varphi(t)}{r} = \int d\varpi \, \Delta^2 \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \varphi(t)}{r}$$

pour l'un et l'autre des deux cas distingués ci-dessus; et comme le terme $\Delta^2 \frac{1}{r}$ qui se trouve dans le second membre de cette équation est identiquement nul, on a

$$\Delta^2 \int d\varpi \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} = \int d\varpi \, \Delta^2 \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} + \Delta^2 \int d\varpi \frac{\varphi(t)}{r} \quad (3c)$$

équation exacte pour des valeurs quelconques de x, y, z.

Si maintenant on multiplie (3c) par la constante a^2, qu'on en déduise (3a) et qu'on se serve de l'équation (3) et du résultat connu:

$$\Delta^2 \int d\varpi \frac{\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma)}{r} = -4\pi \varphi(t, x, y, z) \text{ ou } = 0$$

suivant que (x, y, z) se trouve ou ne se trouve pas entre les limites de l'intégration, on parvient à l'équation

$$a^2 \Delta^2 \int d\varpi \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}, \alpha, \beta, \gamma\right)}{r}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d\varpi \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{a}, \alpha, \beta, \gamma\right)}{r} - 4\pi a^2 \varphi(t, x, y, z), \qquad (4)$$

le point (x, y, z) étant situé entre les limites de l'intégration.

Désignons par $X_2(t)$, $Y_2(t)$, $Z_2(t)$ les fonctions qui satisfont aux équations

$$\Delta^2 X_2(t) = X(t), \quad \Delta^2 Y_2(t) = Y(t), \quad \Delta^2 Z_2(t) = Z(t),$$

par $A_2(t)$, $B_2(t)$, $C_2(t)$ des fonctions correspondantes à celles-ci x, y, z étant remplacés par α, β, γ, et posons, pour abréger,

$$F = \frac{1}{4\pi \Omega^2} \int \frac{d\varpi}{r} \left[\frac{\partial A_2\left(t - \frac{r}{\Omega}\right)}{\partial \alpha} + \frac{\partial B_2\left(t - \frac{r}{\Omega}\right)}{\partial \beta} + \frac{\partial C_2\left(t - \frac{r}{\Omega}\right)}{\partial \gamma} \right],$$

$$L = \frac{1}{4\pi \omega^2} \int \frac{d\varpi}{r} \left[\frac{\partial B_2\left(t - \frac{r}{\omega}\right)}{\partial \gamma} - \frac{\partial C_2\left(t - \frac{r}{\omega}\right)}{\partial \beta} \right],$$

$$M = \frac{1}{4\pi \omega^2} \int \frac{d\varpi}{r} \left[\frac{\partial C_2\left(t - \frac{r}{\omega}\right)}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_2\left(t - \frac{r}{\omega}\right)}{\partial \gamma} \right],$$

$$N = \frac{1}{4\pi \omega^2} \int \frac{d\varpi}{r} \left[\frac{\partial A_2\left(t - \frac{r}{\omega}\right)}{\partial \beta} - \frac{\partial B_2\left(t - \frac{r}{\omega}\right)}{\partial \alpha} \right],$$

où

$$\Omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \omega^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Les limites des intégrales sont les limites du corps élastique, et les dérivées partielles par rapport à α, β, γ sont prises en laissant r constant.

On trouvera donc que les valeurs

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ v_0 &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ w_0 &= \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

satisfont aux équations (2). La première équation (2), par exemple, en y substituant ces valeurs de u_0, v_0, w_0, deviendra

$$\Omega^2 \Delta^2 \frac{\partial F}{\partial x} + \omega^2 \Delta^2 \left[\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right] + X = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right].$$

Mais, d'après l'équation (4), on a

$$\begin{aligned} \Omega^2 \Delta^2 F &= \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial X_2(t)}{\partial x} + \frac{\partial Y_2(t)}{\partial y} + \frac{\partial Z_2(t)}{\partial z}\right), \\ \omega^2 \Delta^2 N &= \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - \frac{\partial X_2(t)}{\partial y} + \frac{\partial Y_2(t)}{\partial x}, \\ \omega^2 \Delta^2 M &= \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} - \frac{\partial Z_2(t)}{\partial x} + \frac{\partial X_2(t)}{\partial z}, \end{aligned}$$

et notre équation se réduit donc à l'équation identique

$$-\Delta^2 X_2(t) + X = 0.$$

Ainsi la première des équations (2) est vérifiée et les deux autres peuvent l'être de la même manière.

Le problème de l'élimination des forces accélératrices étant donc complètement résolu, nous ferons dorénavant abstraction de ces forces.

2.

Des mouvements d'un corps élastique illimité qui sont produits par les mouvements dans un plan.

Avant d'entrer dans la question dont il s'agit, nous ferons quelques remarques mathématiques d'une grande importance dans la théorie de l'élasticité.

Une fonction finie de plusieurs variables $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1})$ peut être exprimée par une intégrale définie de la manière suivante:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\pi^{\frac{1}{2}n}}\left[\int da_1 \int da_2 \ldots \int da_{n-1} f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \frac{x_n - a_n}{r^n}\right]^{x_n = a_n} \quad (6)$$

où

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}.$$

Dans cette formule les limites de l'intégration sont arbitraires et assujetties à la seule condition que les valeurs

$$a_1 = x_1, \quad a_2 = x_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1} = x_{n-1}$$

y soient comprises.

Cette condition sera donc toujours remplie, si chacune des $n-1$ intégrations est faite entre les limites $-\infty$ et $+\infty$. De plus la différence $x_n - a_n$ est supposée être positive avant d'être nulle.

On vérifie cette équation en considérant que, x_n étant égal à a_n, tous les éléments de l'intégrale s'évanouissent, excepté ceux pour lesquels r est égal à zéro, d'où

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = a_{n-1},$$
$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

et en se servant du résultat connu d'après lequel l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da_1 \int_{-\infty}^{+\infty} da_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} da_{n-1} \frac{x_n - a_n}{r^n}$$

qui se transforme en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{n-1} \frac{1}{\{1+\xi_1^2+\xi_1^2+\ldots+\xi_{n-1}^2\}^{\frac{1}{2}n}}$$

par les substitutions

$$a_1 - x_1 = \xi_1(x_n - a_n), \ \ldots, \ a_{n-1} - x_{n-1} = \xi_{n-1}(x_u - a_n)$$

est égale à $\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}$ (Jacobi: De transform. intégr. mult., vol. 12, pag. 60 de ce Journal (Journal de Crelle), où l'intégrale dont il s'agit est désignée par $2^{n-1}S$).

Il est bon d'observer que l'expression comprise entre les crochets (6) satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = 0.$$

Une fonction de deux variables $f(x, y)$ sera donc exprimée par

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left[\int d\alpha \int d\beta \frac{z-\gamma}{r^3} f(\alpha, \beta)\right]^{z=\gamma},$$

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

ou

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial z}\int d\alpha \int d\beta \frac{f(\alpha, \beta)}{r}\right]^{z=\gamma} \qquad (7)$$

le point (x, y) étant situé entre les limites de l'intégration relative à α, β et $z-\gamma$ étant supposé positif avant d'être nul.

L'expression comprise entre les crochets satisfait à l'équation différentielle $\Delta^2 = 0$, et elle exprime l'attraction que d'après la loi newtonienne un plan exerce sur

un point dans la direction de la normale du plan, la masse d'un élément étant $f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$, et l'attraction exercée par l'unité de masse à l'unité de distance étant égale à l'unité. La formule (7) équivaut donc à cet énoncé, que l'attraction que le plan exerce dans la direction de la normale, sur un point infiniment rapproché, est égale à $2\pi f(x, y)$, c'est-à-dire à la masse de l'élément plan $dx\,dy$ divisée par $\frac{1}{2\pi}\, dx\, dy$.

Supposons qu'il s'agisse de satisfaire à l'equation différentielle

$$a^2 \Delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

a étant une constante et que la fonction F soit en outre déterminée par la condition que pour un plan arbitrairement limité que nous prendrons pour le plan coordonné (y, z) et pour des valeurs quelconques du temps t elle se réduise à une fonction donnée de y, z et t, de sorte que l'on ait

$$[F]^{x=0} = F(t, y, z),$$

cela posé, le mouvement sera déterminé dans tout l'espace du côté positif du plan coordonné (y, z) par l'équation

$$\left.\begin{aligned} F &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int d\beta \int d\gamma\, \frac{F\left(t - \frac{r}{a},\ \beta,\ \gamma\right)}{r}, \\ r &= \sqrt{x^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

les limites de l'intégrale étant celles du plan donné. Cette expression satisfera à l'équation différentielle et, pour $x = 0$, on aura

$$[F]^{x=0} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int d\beta\int d\gamma\frac{F\left(t-\frac{r}{a},\,\beta,\,\gamma\right)}{r}\right)^{x=0}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int d\beta\int d\gamma\,\frac{F(t,\beta,\gamma)}{r}\right]^{x=0},$$

d'où, d'après la formule (7)

$$[F]^{x=0} = F(t, y, z)$$

ce qui est la condition donnée.

Nous sommes donc en état de résoudre, par la méthode indiquée, un problème, que l'on n'a résolu jusqu'ici que d'une manière inexacte et incomplète grâce au principe de Huygens.

L'intégrale F nous fait voir que le mouvement peut être considéré comme partant de chaque élément plan $d\beta\cdot d\gamma$ avec une vitesse constante, égale à a.

Passons maintenant aux trois équations (2) du mouvement, en faisant abstraction des forces accélératrices.

En les ajoutant, après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y et z, on obtient, comme on sait

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\,\Delta^2\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2};$$

par conséquent $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = \Omega$ est la vitesse avec laquelle chaque condensation ou dilatation se propage dans le corps élastique. Par l'élimination de θ on déduit des équations (2) ce résultat:

$$\frac{\mu}{\rho}\,\Delta^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Il y a donc une autre espèce du mouvement, qui se propage avec la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \omega$.

Pour la première espèce de mouvement, il faut faire $\varphi = 0$*, d'où * NOTE 2.

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \Omega^2 \Delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Pour l'autre on fera

$$\left.\begin{aligned} &\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \text{d'où} \quad &\omega^2 \Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \omega^2 \Delta^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \omega^2 \Delta^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} (10)$$

Désignons maintenant par u, v, w les projections des déplacements, qui dépendent de ω; par u', v', w' celles qui dépendent de Ω; par U, V, W les sommes de ces deux, et introduisons les nouvelles fonctions:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{r}, \quad \Phi' = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\varphi\left(t - \frac{r}{\Omega}, \beta, \gamma\right)}{r},$$

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\psi\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{r}, \quad \Psi' = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\psi\left(t - \frac{r}{\Omega}, \beta, \gamma\right)}{r},$$

$$X = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\chi\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{r}, \quad X' = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\chi\left(t - \frac{r}{\Omega}, \beta, \gamma\right)}{r},$$

$$r = \sqrt{x^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

Nous verrons que l'on pourra déterminer les mouvements d'un corps élastique illimité, si l'on connait, dans le plan coordonné (y, z) soit la pression normale et les

déplacements tangentiels, soit les pressions tangentielles et le déplacement normal. Dans le premier cas nous poserons

$$\left.\begin{aligned} u &= \Phi - \frac{\partial F}{\partial x}, & u' &= \frac{\partial F'}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, & v' &= \frac{\partial F'}{\partial y}, \\ w &= \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, & w' &= \frac{\partial F'}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

d'où

$$\Delta^2 F = \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\right] = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

* NOTE 3. $$\Delta^2 F' = \frac{\omega^2}{\Omega^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi' + \frac{\partial \Psi'}{\partial y} + \frac{\partial X'}{\partial z}\right] = \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 F'}{\partial t^2}.*$$

Ces valeurs satisfont aux équations générales du mouvement (9) et (10) et, pour x égal à zéro, on obtient

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x}\right]^{x=0} = \left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]^{x=0}$$

$$= \frac{\omega^2}{\Omega^2}\varphi(t, y, z) - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}\left[\frac{\partial \psi(t, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \chi(t, y, z)}{\partial z}\right],$$

$$[v + v']^{x=0} = [V]^{x=0} = \psi(t, y, z),$$

$$[w + w']^{x=0} = [W]^{x=0} = \chi(t, y, z).$$

Les fonctions φ, ψ et χ seront donc déterminées par les fonctions

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]^{x=0}, \quad [V]^{x=0} \text{ et } [W]^{x=0}.$$

Si l'on connait, au lieu de $\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]^{x=0}$, la pression normale $[N_1]^{x=0}$, on posera

$$[N_1] = \left[\lambda\theta + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x}\right]$$
$$= \mu\left[\varphi(t, y, z) - \frac{\partial\psi(t, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial\chi(t, y, z)}{\partial z}\right],$$

équation par laquelle la fonction φ est déterminée.

Cependant, nous n'avons pas fait attention à la fonction arbitraire qui doit entrer dans les valeurs des composantes. Ces valeurs arbitraires de u, v, w, qu'il faut ajouter aux valeurs trouvées, seront

$$u = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int d\beta \int d\gamma \frac{1}{r}\frac{\partial f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{\partial\gamma}$$
$$- \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int d\beta \int d\gamma \frac{1}{r}\frac{\partial f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{\partial\beta},$$

$$v = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\int d\beta \int d\gamma \frac{f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{r}$$
$$- \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int d\beta \int d\gamma \frac{1}{r}\frac{\partial f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{\partial\gamma},$$

$$w = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int d\beta \int d\gamma \frac{f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{r}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int d\beta \int d\gamma \frac{1}{r}\frac{\partial f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{\partial\beta},$$

où les dérivées partielles par rapport à β et γ sont prises en laissant r constant.

On voit que ces valeurs donneront

$$\theta = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^{x=0} = 0, \quad [v]^{x=0} = 0, \quad [w]^{x=0} = 0.$$

En intégrant par parties et désignant les limites de β et γ par β_0, β_1 et γ_0, γ_1, on pourra mettre les ex
* NOTE 4. pressions précédentes sous cette autre forme*

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int d\beta\left[\frac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\ \beta,\ \gamma\right)}{r}\right]_{\gamma=\gamma_0}^{\gamma=\gamma_1} \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int d\gamma\left[\frac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\ \beta,\ \gamma\right)}{r}\right]_{\beta=\beta_0}^{\beta=\beta_1}, \\
v &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int d\beta\left[\frac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\ \beta,\ \gamma\right)}{r}\right]_{\gamma=\gamma_0}^{\gamma=\gamma_1}, \\
w &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int d\gamma\left[\frac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\ \beta,\ \gamma\right)}{r}\right]_{\beta=\beta_0}^{\beta=\beta_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dans le deuxième cas, si l'on connaît dans le plan coordonné (y, z) les pressions tangentielles et le déplacement normal, il faut poser

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}, & u' &= \frac{\partial F'}{\partial x}, \\
v &= \Psi - \frac{\partial F}{\partial y}, & v' &= \frac{\partial F'}{\partial y}, \\
w &= X - \frac{\partial F}{\partial z}, & w' &= \frac{\partial F'}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

d'où

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

$$\Delta^2 F' = \frac{\omega^2}{\Omega^2}\left[\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi'}{\partial y} + \frac{\partial X'}{\partial z}\right] = \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 F'}{\partial t^2}.$$

Les fonctions φ, ψ et χ seront donc déterminées par* * NOTE 5.

$$\varphi(t, y, z) = \frac{\Omega^2}{\omega^2}[U]^{x=0},$$

$$\psi(t, y, z) = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^{x=0} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial y}[U]^{x=0},$$

$$\chi(t, y, z) = \left[\frac{\partial W}{\partial x}\right]^{x=0} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial z}[U]^{x=0}.$$

Or, les pressions tangentielles

$$[T_3]^{x=0} = \mu\left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right]^{x=0},$$

$$[T_2]^{x=0} = \mu\left[\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right]^{x=0}$$

étant connues, on trouvera

$$\varphi(t, y, z) = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}[U]^{x=0},$$

$$\psi(t, y, z) = \frac{1}{\mu}[T_3]^{x=0} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}[U]^{x=0},$$

$$\chi(t, y, z) = \frac{1}{\mu}[T_2]^{x=0} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}[U]^{x=0}.$$

Les valeurs arbitraires des composantes, qu'il faut ajouter à ces valeurs, seront les dérivées par rapport à x des valeurs arbitraires trouvées ci-dessus (12).

3.

Diffraction.

Le mouvement vibratoire d'un corps élastique et illimité, ayant traversé une ouverture d'un plan fixe, serait déterminé par les méthodes indiquées, si l'on pouvait considérer comme connu le mouvemement qui se produit dans l'ouverture. Mais cela n'est vrai que d'une

manière approximative, car le mouvement dans l'ouverture n'est pas exactement le même que celui qui aurait lieu, s'il n'y avait pas de plan fixe.

On aura un mouvement réfléchi de l'ouverture en même temps qu'un mouvement transmis, et, pour déterminer tous les deux, on aura les conditions suivantes: 1° la somme des composantes du mouvement direct et du mouvement réfléchi est égale aux composantes du mouvement transmis à travers l'ouverture, et 2° les pressions normales et tangentielles sur les deux faces du plan qui coïncide avec l'ouverture sont égales en chaque point.

Désignons par U, V, W les composantes du mouvement direct, par U_1, V_1, W_1 celles du mouvement transmis, par U_2, V_2, W_2 celles du mouvement réfléchi, et par θ, θ_1, θ_2, les dilatations correspondant à ces trois mouvements. Faisons coïncider le plan coordonné (y, z) avec l'ouverture. Cela posé, nous aurons pour $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} [U+U_2-U_1]^{x=0} &= 0, \\ [V+V_2-V_1]^{x=0} &= 0, \\ [W+W_2-W_1]^{x=0} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

et de plus

$$\left[\lambda(\theta+\theta_2-\theta_1)+2\mu\frac{\partial(U+U_2-U_1)}{\partial x}\right]^{x=0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial(U+U_2-U_1)}{\partial y}+\frac{\partial(V+V_2-V_1)}{\partial x}\right]^{x=0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial(U+U_2-U_1)}{\partial z}+\frac{\partial(W+W_2-W_1)}{\partial x}\right]^{x=0} = 0.$$

Les trois dernières équations peuvent être simplifiées, au moyen des trois premières, dérivées par rapport à y ou z; de cette manière elles se réduisent aux équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial(U+U_2-U_1)}{\partial x}\right]^{x=0} &= 0,\\ \left[\frac{\partial(V+V_2-V_1)}{\partial x}\right]^{x=0} &= 0,\\ \left[\frac{\partial(W+W_2-W_1)}{\partial x}\right]^{x=0} &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Introduisons les notations du numéro précédent et posons

$$\begin{aligned}
U_1 &= u_1+u'_1, & V_1 &= v_1+v'_1, & W_1 &= w_1+w'_1,\\
U_2 &= u_2+u'_2, & V_2 &= v_2+v'_2, & W_2 &= w_2+w'_2,\\
u'_1 &= \frac{\partial F'_1}{\partial x}, & v'_1 &= \frac{\partial F'_1}{\partial y}, & w'_1 &= \frac{\partial F'_1}{\partial z},\\
u'_2 &= \frac{\partial F'_2}{\partial x}, & v'_2 &= \frac{\partial F'_2}{\partial y}, & w'_2 &= \frac{\partial F'_2}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Le mouvement direct peut être supposé dépendant ou de la vitesse Ω, ou de la vitesse ω. Dans le premier cas, nous poserons

$$U = \frac{\partial F'}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial F'}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial F'}{\partial z}.$$

On trouvera que les composantes u_1, u_2, etc., qui dépendent de ω, s'évanouissent*, et les équations (14) et (15) deviendront * NOTE 6.

$$[F'+F'_2-F'_1]^{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial(F'+F'_2-F'_1)}{\partial x}\right]^{x=0} = 0.$$

Notons les équations

$$\left[\frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right]^{x=0} = -\psi(t, y, z), \quad \left[\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right]^{x=0} = -\varphi(t, y, z),$$

dans lesquelles x est supposé s'évanouir, après avoir eu une valeur négative, et posons

$$\left.\begin{aligned} F'_2 &= \Phi' + \frac{\partial \Psi'}{\partial x}, \\ F'_1 &= \Phi' + \frac{\partial \Psi'}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Ces valeurs étant identiques pour les deux fonctions F'_2 et F'_1 on a

$$[F'_1 - F'_2]^{x=0} = [F']^{x=0} = 2\psi(t, y, z),$$
$$\left[\frac{\partial(F'_1 - F'_2)}{\partial x}\right]^{x=0} = \left[\frac{\partial F'}{\partial x}\right]^{x=0} = 2\varphi(t, y, z).$$

Les équations précédentes déterminent les fonctions ψ et φ, et par conséquent les fonctions Φ' et Ψ'.

Dans l'autre cas, le mouvement direct étant dépendant de la vitesse ω, nous avons $U = u$, $V = v$, $W = w$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Les fonctions F'_1 et F'_2 s'évanouissent, et les équations (14) et (15) deviennent

$$[u + u_2 - u_1]^{x=0} = 0, \quad [v + v_2 - v_1]^{x=0} = 0,$$
$$[w + w_2 - w_1]^{x=0} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial(u + u_2 - u_1)}{\partial x}\right]^{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial(v + v_2 - v_1)}{\partial x}\right]^{x=0} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial(w + w_2 - w_1)}{\partial x}\right]^{x=0} = 0.$$

Introduisons les fonctions Φ_1, Ψ_1, X_1, en les faisant dépendre des nouvelles fonctions φ_1, ψ_1, χ_1, de la même manière que, dans le numéro précédent, on a fait dépendre Φ, Ψ, X de φ, ψ, χ, et posons

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \Phi + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial (F+F_1)}{\partial x}, \\ v_1 &= \Psi + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial (F+F_1)}{\partial y}, \\ w_1 &= X + \frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial (F+F_1)}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

d'où

$$\Delta^2 F = \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial X_1}{\partial z}\right] = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}.$$

Aux composantes du mouvement réfléchi c'est-à-dire aux quantités u_2, v_2, w_2 nous attribuons les mêmes valeurs, avec la seule différence de prendre x toujours négatif.

En supposant, que

$$[F]^{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\right]^{x=0} = 0, \qquad (18)$$

nous trouverons* * NOTE 7.

$$\begin{aligned} [u+u_2-u_1]^{x=0} &= [u]^{x=0} - 2\varphi_1(t,y,z) = 0, \\ [v+v_2-v_1]^{x=0} &= [v]^{x=0} - 2\psi_1(t,y,z) = 0, \\ [w+w_2-w_1]^{x=0} &= [w]^{x=0} - 2\chi_1(t,y,z) = 0, \\ \left[\frac{\partial(u+u_2-u_1)}{\partial x}\right]^{x=0} &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^{x=0} - 2\varphi(t,y,z) = 0, \\ \left[\frac{\partial(v+v_2-v_1)}{\partial x}\right]^{x=0} &= \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^{x=0} - 2\psi(t,y,z) = 0, \\ \left[\frac{\partial(w+w_2-w_1)}{\partial x}\right]^{x=0} &= \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]^{x=0} - 2\chi(t,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions φ, φ_1, etc., seront donc déterminées, et maintenant on vérifiera aisément les équations (18). Si, par exemple, le mouvement direct forme une onde

plane, on trouvera pour l'onde transmise à des distances assez grandes de l'ouverture les expressions que M. Stokes a déjà trouvées d'une manière moins rigoureuse.

4.

Tuyaux sonores.

Considérons maintenant les petits mouvements vibratoires dans un corps élastique et complètement fluide entre des plans fixes, qui permettent aux points contigus de faire librement tous les mouvements parallèles au plan en excluant le mouvement normal. — Quand le corps élastique est complètement fluide, la constante μ est égale à zéro, et il n'existe qu'une seule espèce de vibration, celle qui dépend de la vitesse Ω.

En désignant par u, v, w les composantes des déplacements, nous posons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = w,$$

et donnons à la fonction F le nom de potentiel de l'onde ou du mouvement.

Supposons que le corps fluide soit renfermé dans un tuyau d'une longueur illimitée et à base rectangle. Faisons coïncider ses parois avec les plans coordonnés ($y = 0$) et ($z = 0$) et avec les plans parallèles à ces derniers ($y = b$) et ($z = c$). Le potentiel du mouvement direct et de tous les mouvements réfléchis pourra donc être de la forme.

$$\left.\begin{aligned} F &= -\frac{1}{2\pi}\sum\sum\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma\,\frac{f\left(t-\frac{r}{\Omega},\,\beta,\,\gamma\right)}{r}, \\ r &= \sqrt{x^2+(y+2i_1b\pm\beta)^2+(z+2i_2c\pm\gamma)^2}, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$\Sigma\Sigma$ désignant la somme pour toutes les valeurs entières, négatives et positives, de i_1 et i_2, et le signe $\pm$ introduit par r dans la fonction F, ayant ici, comme dans ce qui suit une signification spéciale, définie par

$$\text{fonct.}(\pm) = \text{fonct.}(+) + \text{fonct.}(-).$$

Cette valeur de F satisfait à l'équation différentielle

$$\Delta^2 F = \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

et donne

$$[u]^{x=0} = f(t, y, z),$$
$$[v]^{y=0} = 0, \quad [v]^{y=b} = 0,$$
$$[w]^{z=0} = 0, \quad [w]^{z=c} = 0.$$

Supposons à présent que le tuyau soit limité, qu'il soit coupé normalement à l'axe et forme un prisme droit de longueur a. Faisons coïncider avec le plan coordonné ($x = 0$) son premier bout, qui pourra être fermé où ouvert, mais supposons que l'autre bout soit ouvert.

Cela posé, le mouvement produit au premier bout se propagera à l'autre bout ouvert, et là il sera en partie réfléchi, en partie transmis au fluide illimité qui se trouve hors du tuyau.

Les composantes des vibrations réfléchies étant

$$u_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad w_2 = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

et celles des vibrations transmises

$$u_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad w_1 = \frac{\partial F_1}{\partial z},$$

nous aurons, comme dans le numéro precédent, les conditions suivantes:

$$[F+F_2-F_1]^{x=a}=0, \tag{20}$$

$$\left[\frac{\partial(F+F_2-F_1)}{\partial x}\right]^{x=a}=0. \tag{21}$$

* NOTE 8. Posons maintenant*

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{2\pi}\sum\sum\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma\,\frac{f_2\left(t-\frac{r}{\Omega},\,\beta,\,\gamma\right)}{r}, \\ r &= \sqrt{(x-a)^2+(y+2i_1b\pm\beta)^2+(z+2i_2c\pm\gamma)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

et

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma\,\frac{f_1\left(t-\frac{r}{\Omega},\,\beta,\,\gamma\right)}{r}, \\ r &= \sqrt{(x-a)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Ces valeurs de F_2 et F_1, introduites dans (21), nous donnent l'équation

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]^{x=a}+f_2(t,\,y,\,z)-f_1(t,\,y,\,z)=0, \tag{24}$$

au moyen de laquelle on peut éliminer l'une des fonctions f_1 ou f_2; l'autre doit donc être déterminée par l'équation (20).

Mais, en général, on ne peut pas effectuer cette détermination. Nous chercherons donc une solution approximative, en supposant, que tous les déplacements entre les parois du tuyau se fassent seulement dans la direction de l'axe du tuyau.

Cette hypothèse, qui ne s'accorde pas exactement avec l'équation (20), nous conduira au résultat le plus juste, si nous égalons à zéro la somme des erreurs pour

toutes les valeurs de y et z. L'équation (20) doit donc être remplacée par cette autre

$$\int_0^b dy \int_0^c dz\,[F+F_2-F_1]^{x=a} = 0. \tag{25}$$

Maintenant le calcul peut s'étendre à des tuyaux d'une base quelconque, et nous pouvons poser* * NOTE 9.

$$F = h\cos k(\Omega t - x), \tag{26}$$

$$F_2 = h_2 \cos k(\Omega t + x - 2a - \Delta), \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{2\pi} h_1 k \int d\beta \int d\gamma\, \frac{\sin k(\Omega t - r - a - \delta)}{r}, \\ r &= \sqrt{(x-a)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

en déterminant les constantes h_2, h_1, Δ, δ par les équations (21)

$$\left[\frac{\partial(F+F_2-F_1)}{\partial x}\right]^{x=a} = 0$$

et

$$\int dy \int dz\,[F+F_2-F_1]^{x=a} = 0, \tag{29}$$

les intégrations devant être étendues à toute la surface de la base.

En développant $\sin k(\Omega t - r - a - \delta)$ suivant les puissances ascendantes de r, on trouvera

$$\int dy \int dz\,[F_1]^{x=a} = h_1 B\,[-\varepsilon \sin k(\Omega t - a - \delta) + \varepsilon' \cos k(\Omega t - a - \delta)],$$

B étant l'aire de la base, ε et ε' des constantes positives. Nous aurons donc, en vertu des équations (21) et (29),

$$h\sin k(\Omega t - a) - h_2 \sin k(\Omega t - a - \Delta) = h_1 \sin k(\Omega t - a - \delta),$$

$$h\cos k(\Omega t - a) + h_2 \cos k(\Omega t - a - \Delta)$$
$$= h_1\,[-\varepsilon \sin k(\Omega t - a - \delta) + \varepsilon' \cos k(\Omega t - a - \delta)].$$

En comparant les coefficients de $\sin k(\Omega t - a)$ et de $\cos k(\Omega t - a)$, on trouve

$$\operatorname{tg} k\Delta = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2-\varepsilon'^2}, \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} h_2 &= -\gamma h, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{(1-\varepsilon')^2+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon')^2+\varepsilon^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Supposons d'abord que le premier bout du tuyau soit fermé par un plan fixe; dans ce cas, le potentiel du mouvement primitif, produit d'une manière quelconque à l'autre bout, sera $h\cos k(\Omega t + x)$; après la réflexion produite par le plan fixe ($x = 0$), il deviendra $h\cos k(\Omega t - x)$, et le potentiel de la somme de ces deux mouvements sera $2h\cos k\Omega t\cos kx$.

Lorsque les réflexions de la première onde se seront répétées n fois au bout ouvert, le potentiel sera

$$\begin{aligned} 2h\cos kx\,[&\cos k\Omega t - \gamma\cos k(\Omega t - 2a - \Delta) \\ &+ \gamma^2\cos k(\Omega t - 4a - 2\Delta) - \ldots \\ &+ (-\gamma)^n\cos k(\Omega t - n(2a+\Delta))]. \end{aligned}$$

Pour $n = \infty$ cette expression converge vers la limite

$$2\frac{h}{\rho}\cos kx\cos(k\Omega t - \theta), \tag{32}$$

où l'on a posé

$$\rho = \sqrt{1+\gamma^2+2\gamma\cos k(2a+\Delta)},$$

$$\sin\theta = \frac{\gamma}{\rho}\sin k(2a+\Delta).$$

Cette valeur du potentiel aura son maximum pour

$$k(2a+\Delta) = (2p+1)\pi,$$

p étant un nombre entier. En désignant par $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la longueur d'une onde entière, le mouvement vibratoire aura donc sa plus grande force, quand on aura

$$\lambda = \frac{4a + 2\Delta}{2p + 1} \tag{33}$$

ou

$$a + \frac{\Delta}{2} = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \cdots$$

Dans ce cas la valeur (32) du potentiel devient

$$2\frac{h}{1-\gamma}\cos kx \cos k\Omega t. \tag{34}$$

Supposons en second lieu que les deux bouts du tuyau soient ouverts, et que le mouvement se produise au second bout ($x = a$). Le potentiel du mouvement primitif sera

$$h \cos k(\Omega t + x).$$

Après la réflexion qui a lieu au premier bout ouvert ($x = 0$), il devient

$$-h\gamma \cos k(\Omega t - x - \Delta);$$

le potentiel de la somme de ces deux mouvements sera donc

$$h[\cos k(\Omega t + x) - \gamma \cos k(\Omega t - x - \Delta)].$$

Lorsque les réflexions se seront répétées un nombre infini de fois, le potentiel sera

$$\frac{h}{\rho}[\cos k(\Omega t + x - \theta) - \gamma \cos k(\Omega t - x - \Delta - \theta)], \tag{35}$$

où l'on a posé

$$\rho = \sqrt{1 + \gamma^4 - 2\gamma^2 \cos 2k(a + \Delta)},$$

$$\sin\theta = \frac{\gamma^2}{\rho}\sin 2k(a + \Delta).$$

Le mouvement aura donc sa plus grande force, quand on aura

$$2k(a+\Delta) = 2p\pi,$$

d'où

$$\lambda = \frac{2(a+\Delta)}{p} \tag{36}$$

ou

$$a+\Delta = \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2} \cdots$$

Dans ce cas la valeur (35) du potentiel devient

$$-\frac{h}{1-\gamma}\sin k\,\Omega t \sin kx + \frac{h}{1+\gamma}\cos k\,\Omega t \cos kx. \tag{37}$$

On voit par la valeur (32) du potentiel que, dans le cas où l'un des bouts du tuyau est fermé, il y aura des nœuds ou des points parfaitements immobiles, savoir ceux qui donnent $\sin kx = 0$, tandis qu'au contraire dans le cas (37) où les deux bouts sont ouverts, on ne pourra dire que d'une manière approximative qu'il y a des points immobiles.

Pour ces points on a $\cos kx = 0$.

Si le tuyau est cylindrique, R étant le rayon de la
* NOTE 10. section circulaire normale à l'axe, on trouvera*

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{n=\infty}(kR)^{2n+1}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\frac{3}{2})\,\Gamma(n+\frac{5}{2})},$$

$$\varepsilon' = \sum_{n=0}^{n=\infty}(kR)^{2n+2}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(n+3)}.$$

Pour des valeurs très petites de kR, on aura

$$\varepsilon = \frac{8}{3\pi}kR, \quad \varepsilon' = 0,$$

d'où, par l'équation (30),

$$\Delta = \frac{16}{3\pi}R.$$

Pour un tuyau ouvert aux deux bouts on aura donc

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda p - a}{2R} = \frac{8}{3\pi} = 0{,}8488.$$

Ce résultat est parfaitement confirmé par les expériences de M. Zaminer (Ann. de Pogg. 97), qui, pour un tuyau ouvert aux deux bouts, d'une longueur de 500^{mm} et d'un diamètre (d) de 25^{mm}, a trouvé

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 522{,}2,$$

d'où

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda - a}{d} = 0{,}848.$$

Dans le tableau suivant j'ai calculé la valeur de $\frac{\Delta}{d}$ pour différentes valeurs de $2R$ ou d, divisé par $\frac{1}{2}\lambda$.

$\frac{2d}{\lambda}$	$\frac{\Delta}{d}$	$\frac{2d}{\lambda}$	$\frac{\Delta}{d}$
0,00	0,8488	0,40	0,7293
0,05	0,8462	0,45	0,7080
0,10	0,8385	0,50	0,6873
0,15	0,8263	0,55	0,6672
0,20	0,8106	0,60	0,6480
0,25	0,7921	0,65	0,6298
0,30	0,7720	0,70	0,6125
0,35	0,7508	0,75	0,5962

Si l'on applique les nombres de ce tableau aux données de l'expérience que nous venons de citer, on aura plus exactement:

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda - a}{d} = 0{,}8463.$$

Les expériences de M. Wertheim (Ann. de chim. et de phys. 31) donnent, pour les tuyaux cylindriques ouverts

aux deux bouts, $\frac{\Delta}{d} = 2\sqrt{\pi} \cdot 0{,}187 = 0{,}663$, indépendamment du diamètre, tandis que M. Zaminer trouve que la valeur de $\frac{\Delta}{d}$ diminue, quand le diamètre devient plus grand.

Ses expériences donnent cependant un décroissement plus fort que ne l'indique le calcul, dont les résultats sont par conséquent compris entre ceux de ces deux physiciens. Les expériences faites sur des tuyaux fermés ne s'accordent pas avec les résultats du calcul, sans doute par ce que le fond du tuyau n'est pas complètement immobile.

Il y a encore beaucoup d'autres problèmes, dont la solution serait importante; mais on ne serait pas à même de contrôler les résultats du calcul au moyen d'expériences. La difficulté que l'on éprouve dans les expériences à réaliser d'assez près les hypothèses mathématiques, a empêché jusqu'à présent un accord suffisant entre la théorie et les observations.

5.

Equilibre du prisme rectangulaire.

Considérons un corps homogène, à élasticité constante, qui soit limité par les plans coordonnés, et par trois autres plans parallèles aux premiers, aux distances a, b et c.

Si les données relatives aux déplacements des points situés dans les six faces, ou aux forces extérieures qui agissent sur ces faces, suffisent pour déterminer complètement l'équilibre intérieur, il faudra résoudre le problème de déterminer par les données tous les déplacements et

toutes les forces élastiques qui se produisent en chaque point du corps. Nous allons nous borner ici aux deux cas qui comportent une solution exacte. Dans le premier cas, les déplacements normaux et les forces tangentielles, dans le sécond les déplacements tangentiels et les forces normales sont donnés, pour les points situés dans les six faces. On admet que les valeurs des forces données sont compatibles avec les conditions qu'exige l'équilibre extérieur du corps.

Posons

$$\left.\begin{aligned} F &= -\frac{1}{2\pi}\sum\sum\sum\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma\left[\frac{f(\beta,\gamma)}{r}-\frac{f_1(\beta,\gamma)}{r_1}\right],\\ r &= \sqrt{(x+2ia)^2+(y+2i_1b\pm\beta)^2+(z+2i_2c\pm\gamma)^2},\\ r_1 &= \sqrt{(x+(2i+1)a)^2+(y+2i_1b\pm\beta)^2+(z+2i_2c\pm\gamma)^2}\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

où le signe $\pm$ a la même signification qu'auparavant, et où la sommation se rapporte aux trois nombres i, i_1, i_2 dont chacun prend toutes les valeurs entières, positives et négatives, de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Il est évident par ce qui précède que la fonction F vérifie les équations suivantes:

$$\Delta^2 F = 0,$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]^{x=0} = f(y,z),\qquad \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]^{x=a} = f_1(y,z),$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]^{y=0,b} = 0,\qquad \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]^{z=0,c} = 0.$$

Introduisons encore, en conservant les mêmes notations, la fonction

$$F_2 = -\frac{1}{2\pi}\sum\sum\sum\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma\left[\frac{r}{2}f(\beta,\gamma)-\frac{r_1}{2}f_1(\beta,\gamma)\right]\quad(39)$$

elle satisfera aux équations

$$\Delta^2 F_2 = F,$$

$$\left[\frac{\partial F_2}{\partial y}\right]^{y=0,\,b} = 0, \qquad \left[\frac{\partial F_2}{\partial z}\right]^{z=0,\,c} = 0,$$

et l'on trouvera en outre

$$\left[\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}\right]^{x=0} = f(y,z), \qquad \left[\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}\right]^{x=a} = f_1(y,z),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}\right]^{x=0,\,a} = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}\right]^{x=0,\,a} = 0.$$

Bien que les expressions F et F_2 aient des valeurs infinies, cette circonstance n'infirmera en rien l'exactitude des développements ultérieurs, car on ne se servira que de celles des dérivées de ces expressions, qui restent finies.

Si l'on transforme la valeur de $\frac{\partial F}{\partial x}$, soit en remplaçant la somme triple par une intégrale triple, soit en développant $f(\beta,\gamma)$ et $f_1(\beta,\gamma)$ suivant les cosinus des multiples de l'arc $\frac{\pi\beta}{b}$ et de l'arc $\frac{\pi\gamma}{c}$, on parviendra à une autre expression, dont l'intégrale par rapport à x est*

* NOTE 11.

$$\left.\begin{aligned} F = -\frac{1}{bc}\sum\sum\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma\,\frac{\cos\frac{\pi i_1 y}{b}\cos\frac{\pi i_2 z}{c}\cos\frac{\pi i_1\beta}{b}\cos\frac{\pi i_2\gamma}{c}}{p\,(e^{pa}-e^{-pa})} \\ \times\left[(e^{p(a-x)}+e^{-p(a-x)})f(\beta,\gamma)-(e^{px}+e^{-px})f_1(\beta,\gamma)\right], \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

où

$$p = \pi\sqrt{\frac{i_1^2}{b^2}+\frac{i_2^2}{c^2}}.$$

Cette valeur de F, qui est finie, satisfait aux mêmes conditions que l'on vient d'écrire pour la valeur (38)

de F. On trouve pour F_2 une valeur correspondante qui est finie, savoir:

$$\left.\begin{aligned} F_2 = -\frac{1}{bc}\sum\sum\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma\,\frac{\cos\frac{\pi i_1 y}{b}\cos\frac{\pi i_2 z}{c}\cos\frac{\pi i_1\beta}{b}\cos\frac{\pi i_2\gamma}{c}}{2p^2(e^{pa}-e^{-pa})} \\ \times\left[\begin{aligned}&\left((a-x)(e^{p(a-x)}-e^{-p(a-x)})-\left(a\frac{e^{pa}+e^{-pa}}{e^{pa}-e^{-pa}}+\frac{1}{p}\right)(e^{p(a-x)}+e^{-p(a-x)})\right)f(\beta,\gamma)\\ &-\left(x(e^{px}-e^{-px})-\left(a\frac{e^{pa}+e^{-pa}}{e^{pa}-e^{-pa}}+\frac{1}{p}\right)(e^{px}+e^{-px})\right)f_1(\beta,\gamma)\end{aligned}\right]. \end{aligned}\right\}(41)$$

Introduisons en outre les fonctions $\mathfrak{F}$ et Φ en les faisant respectivement dépendre de $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ et de φ, φ_1 de la même manière que F dépend de f, f_1. Introduisons enfin les fonction $\mathfrak{F}'$ et Φ', qui dépendront des mêmes fonctions $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ et φ, φ_1 et qui ne différeront des expressions de $\mathfrak{F}$ et Φ contenues dans les équations analogues à (38) que par l'acception du signe $\pm$.

Nous distinguerons le nouveau sens qu'il faut attribuer à ce signe dans les sommes où il se trouve, en l'écrivant $[\pm]$, et en y attachant la signification définie par l'équation

$$\text{fonct. }([\pm]) = \text{fonct. }(+) - \text{fonct. }(-).$$

Il y a des valeurs finies de $\mathfrak{F}'$, Φ' semblables aux valeurs de $\mathfrak{F}$, Φ qui sont contenues dans les équations analogues à (40). On arrive à ces nouvelles valeurs en remplaçant dans $\mathfrak{F}$, Φ tous les cosinus par des sinus.

On voit aisément que l'on aura

$$\mathfrak{F}' = 0 \quad\text{et}\quad \Phi' = 0 \quad\text{pour}\quad y = 0,\ y = b, z = 0,\ z = c,$$

et

$$\left[\frac{\partial\mathfrak{F}'}{\partial x}\right]^{x=0} = \mathfrak{f}(y,z),\quad \left[\frac{\partial\mathfrak{F}'}{\partial x}\right]^{x=a} = \mathfrak{f}_1(y,z),$$

$$\left[\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right]^{x=0} = \varphi(y,z),\quad \left[\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right]^{x=a} = \varphi_1(y,z).$$

Posons maintenant

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathfrak{F}+(2+\varepsilon)F-(1+\varepsilon)\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\right], \\ v &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathfrak{F}+\varepsilon F-(1+\varepsilon)\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\right]+2\frac{\partial \Phi'}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\mathfrak{F}+\varepsilon F-(1+\varepsilon)\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\right]-2\frac{\partial \Phi'}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

où

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}.$$

Ces valeurs des composantes, qui satisfont aux équations de l'équilibre, donnent

$$\begin{aligned} [u]^{x=0} &= f(y,z)+\mathfrak{f}(y,z), \\ \left[\frac{1}{2\mu}T_2\right]^{x=0} &= \frac{\partial \mathfrak{f}(y,z)}{\partial z}-\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}, \\ \left[\frac{1}{2\mu}T_3\right]^{x=0} &= \frac{\partial \mathfrak{f}(y,z)}{\partial y}+\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial z}, \\ [u]^{x=a} &= f_1(y,z)+\mathfrak{f}_1(y,z), \\ \left[\frac{1}{2\mu}T_2\right]^{x=a} &= \frac{\partial \mathfrak{f}_1(y,z)}{\partial z}-\frac{\partial \varphi_1(y,z)}{\partial y}, \\ \left[\frac{1}{2\mu}T_3\right]^{x=a} &= \frac{\partial \mathfrak{f}_1(y,z)}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_1(y,z)}{\partial z}, \end{aligned}$$

tandis que les déplacements normaux et les forces tangentielles qui se rapportent aux points situés dans les autres faces du prisme sont nuls.

Les six fonctions f, $\mathfrak{f}$ etc. seront donc déterminées par les dernières six équations, et, si l'on connaît les déplacements normaux et les forces tangentielles qui se rapportent aux points situés dans les deux faces ($x = 0$) et ($x = a$), les composantes des déplacements, qui en dépendent, seront déterminées par les équations (42).

De la même manière on trouvera les composantes des déplacements produits par des déplacements normaux et des forces tangentielles qui se rapportent aux points situés dans les autres faces du prisme.

Il est bon de remarquer, que la solution que l'on vient de donner contient des fonctions arbitraires; elles y entrent par la détermination de $\mathfrak{f}(y, z)$, $\mathfrak{f}_1(y, z)$, $\varphi(y, z)$, et $\varphi_1(y, z)$.

Lorsqu'il s'agit de résoudre le problème inverse, dans lequel les forces normales et les déplacements tangentiels pour les points situés dans les six faces sont donnés, on formera les composantes des déplacements qui dépendent des forces normales et des déplacements tangentiels relatifs aux points situés dans les deux faces $(x = 0)$ et $(x = a)$; elles sont données par les équations:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left[2F-(1+\varepsilon)\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\right]+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}'}{\partial x^2}, \\ v &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left[\Phi-(1+\varepsilon)\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}'}{\partial x\,\partial y}, \\ w &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[-\Phi-(1+\varepsilon)\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\right]+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}'}{\partial x\,\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Ces valeurs des composantes, qui satisfont aux équations de l'équilibre, donnent

$$\left[\frac{1}{2\mu}N_1\right]^{x=0} = \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial y\,\partial z}-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathfrak{f}(y, z),$$

$$\left[\frac{1}{2\mu}N_1\right]^{x=a} = \frac{\partial^2 f_1(y, z)}{\partial y\,\partial z}-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathfrak{f}_1(y, z),$$

$$[v]^{x=0} = \frac{\partial \mathfrak{f}(y, z)}{\partial y}+\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z},$$

$$[v]^{x=a} = \frac{\partial \mathfrak{f}_1(y, z)}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial z},$$

$$[w]^{x=0} = \frac{\partial \mathfrak{f}(y,z)}{\partial z} - \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}.$$

$$[w]^{x=a} = \frac{\partial \mathfrak{f}_1(y,z)}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1(y,z)}{\partial y},$$

tandis que les forces normales et les déplacements tangentiels qui se rapportent aux points situés dans les autres faces sont nuls. On pourra donc déterminer les fonctions f, $\mathfrak{f}$ etc. par les six dernières équations et le problème sera résolu.

Copenhague, le 28 novembre 1860.

NOTES.

NOTE 1. Une analyse de ce mémoire se trouve dans les „Fortschritte der Physik“, t. 17, p. 106—113.

NOTE 2. C'est-à-dire, qu'on doit avoir $\varphi = 0$, si la première espèce de mouvement a lieu seule. Mais dans ce cas on aura par conséquent

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Les équations (2) se réduiront alors à

$$\frac{\partial\left(\Omega^2 \Delta^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\left(\Omega^2 \Delta^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\left(\Omega^2 \Delta^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)}{\partial z} = 0,$$

par où l'on reconnaît que

$$\Omega^2 \Delta^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

est fonction de t seulement et que F peut être choisi de manière que

$$\Omega^2 \Delta^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

NOTE 3. On ne peut pas déduire l'équation

$$\Delta^2 F' = \frac{\omega^2}{\Omega^2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi' + \frac{\partial \Psi'}{\partial y} + \frac{\partial X'}{\partial z}\right] = \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 F'}{\partial t^2}$$

des equations (11); mais on reconnaît qu'elle est compatible avec ces équations et que les équations (9) et (10) sont vérifiées, si F et F' sont déterminées de manière à satisfaire à l'équation en question et à l'équation précédente. De plus on voit alors que pour $x = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 F'}{\partial t^2}$ seront identiques, d'où Lorenz conclut que F et F' aussi seront identiques.

De même on reconnaît que pour $x = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ seront identiques avec $\frac{\partial^2 F'}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F'}{\partial z^2}$ et qu'alors

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} = \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\left(\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\right).$$

NOTE 4. Dans l'expression de u on différentie par rapport à β et γ en laissant r constant. Par conséquent on aura, en désignant par $\frac{\delta f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{\delta \gamma}$ la différentiation complète par rapport à γ,

$$\frac{\delta}{\delta \gamma} f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right) = \frac{\partial}{\partial \gamma} f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right) + \frac{\partial}{\partial r} f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial \gamma}.$$

En intégrant par parties, on obtiendra

$$\int d\beta \int d\gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \gamma} f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right) = \int d\beta \left[\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)\right]_{\gamma = \gamma_0}^{\gamma = \gamma_1}$$

$$- \int d\beta \int d\gamma \left[f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \gamma} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right) \frac{\partial r}{\partial \gamma}\right];$$

mais comme $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \gamma} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$, et comme $f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)$ ne dépend de z que par l'intermédiaire de r, on en déduira

$$\int d\beta \int d\gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \gamma} f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)$$

$$= \int d\beta \left[\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)\right]_{\gamma=\gamma_0}^{\gamma=\gamma_1} + \frac{\partial}{\partial z} \int d\beta \int d\gamma \frac{f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{r}.$$

NOTE **5**. On aura

$$[U]^{x=0} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial x}\right]^{x=0}.$$

Or

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{x=0} = \varphi(t, y, z)$$

et

$$\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F'}{\partial t^2}\right)}{\partial x}\right]^{x=0} = \frac{\omega^2 \partial \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}\right]^{x=0}}{\partial x}.$$

Mais

$$\Delta^2 \Phi = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

et

$$\Delta^2 \Phi' = \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2},$$

et par conséquent

$$\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}\right)}{\partial x}\right]^{x=0} = \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\Omega^3}\right) \frac{\partial^2 \varphi(t, y, z)}{\partial t^2}.$$

On déduit de là

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F'}{\partial x}\right] = \omega^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right) \varphi(t, y, z),$$

$$[U]^{x=0} = \varphi(t, y, z) - \omega^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right) \varphi(t, y, z).$$

De même on obtient

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^{x=0} = \psi(t, y, z) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F'}{\partial y}\right]^{x=0}$$
$$= \psi(t, y, z) - \omega^2\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right)\frac{\partial \varphi(t, y, z)}{\partial y},$$

d'où l'on peut déduire l'expression du texte. On obtient d'une manière analogue la valeur de $\chi(t, y, z)$.

NOTE **6**. Je ne crois pas qu'on puisse démontrer en toute rigueur que les quantités u_1, u_2 ... s'évanouissent; mais on reconnaît que les conditions (14) et (15) sont remplies si l'on fait cette hypothèse et si l'on suppose de plus que

$$[F' + F'_2 - F'_1]^{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial(F' + F'_2 - F'_1)}{\partial x}\right]^{x=0} = 0.$$

La supposition que u_1, u_2 ... s'évanouissent équivaut à admettre que les vibrations longitudinales ne peuvent pas par diffraction être transformées en vibrations transversales.

NOTE **7**. Voir note 6 p. 22 du premier tome.

NOTE **8**. Les séries (19) et (22) sont en général divergentes (voir la remarque faite par Lorenz lui même p. 32).

NOTE **9**. On ne peut pas, au moyen des suppositions faites, déduire les équations (27) et (28); mais on reconnaît qu'on peut satisfaire aux conditions données en supposant que F_2 et F_1 sont déterminées par les équations (27) et (28).

NOTE **10**. Les séries qui expriment ε et ε' peuvent être obtenues de la manière suivante.

On a

$$\iint [F_1]^{x=a} dy dz = h_1 B[-\varepsilon \sin k(\Omega t - a - \delta) + \varepsilon' \cos k(\Omega t - a - \delta)]$$

et

$$F_1 = -\frac{1}{2\pi} h_1 k \iint \frac{\sin k(\Omega t - r - a - \delta)}{r} d\beta\, d\gamma\,,$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

les deux intégrations s'étendant à toute la surface d'un cercle de rayon R. En développant $\sin k(\Omega t - r - a - \delta)$ suivant les puissances croissantes de r et introduisant les coordonnées polaires, on obtiendra facilement

$$B\varepsilon = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n k^{2n+1}}{2n!} \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^R \rho'\, d\rho' \int_0^{2\pi} r^{2n-1}\, d\theta,$$

$$B\varepsilon' = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n k^{2n+2}}{2n+1!} \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^R \rho'\, d\rho' \int_0^{2\pi} r^{2n}\, d\theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta},$$

ou, en remplaçant ρ par $R\rho$, ρ' par $R\rho'$,

$$B\varepsilon = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n k^{2n+1} R^{2n+3}}{2n!} \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^1 \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} r^{2n-1}\, d\theta,$$

$$B\varepsilon' = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n k^{2n+2} R^{2n+4}}{2+1!} \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^1 \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} r^{2n} d\theta.$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta}.$$

Nous considérerons l'intégrale

$$u_p = \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^1 \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} r^p\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^1 \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} (\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta)\, r^{p-2}\, d\theta.$$

Mais comme l'intégrale triple

$$\int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^1 \rho'\, d\rho' \int_0^{2\pi} \rho'^2 r^{p-2}\, d\theta$$

reste invariable par la permutation de ρ et ρ', on aura par conséquent

$$u_p = \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^1 \rho'\, d\rho' \int_0^{2\pi} (2\rho^2 - 2\rho\rho' \cos\theta) r^{p-2}\, d\theta$$
$$= \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^1 \rho'\, d\rho' \int_0^{2\pi} (2\rho - 2\rho' \cos\theta) r^{p-2}\, d\theta.$$

Mais $2\rho - 2\rho' \cos\theta = \frac{\partial r^2}{\partial \rho}$, et, en intégrant par parties, on obtiendra

$$u_p = \frac{2}{p} \int_0^1 \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} (\sqrt{1+\rho'^2 - 2\rho' \cos\theta})^p d\theta - \frac{4}{p} u_p,$$
$$u_p = \frac{2}{p+4} \int_0^1 \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} (\sqrt{1+\rho'^2 - 2\rho' \cos\theta})^p d\theta.$$

Or cette expression peut être regardée comme une intégrale double étendue à toute l'aire d'un cercle de rayon 1, chaque élément de la surface étant multiplié par la p-ième puissance de sa distance à un point fixe de la circonférence. Si l'on prend pour origine des coordonnées polaires ce point fixe et pour axe le diamètre qui passe par le point fixe, on obtiendra

$$u_p = \frac{4}{p+4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^{p+1}\, dr = \frac{4 \cdot 2^{p+2}}{(p+2)(p+4)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2}\theta\, d\theta.$$

Si p est un entier impair $2n-1$, on obtiendra

$$u_{2n-1} = \frac{4 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+3)(2n+1)} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \frac{2}{3}$$
$$= \frac{2n!\,\pi}{\Gamma(n+\frac{5}{2})\,\Gamma(n+\frac{3}{2})},$$

et, si p et un entier pair $2n$,

$$u_{2n} = \frac{4 \cdot 2^{2n+2}}{(2n+4)(2n+2)} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{2n+1!\,\pi}{\Gamma(n+3)\,\Gamma(n+2)}.$$

En introduisant ces valeurs dans les expressions de B_ε et de B_ε' on obtiendra les résultats du texte.

NOTE **11**. Les séries (40) et (41) ont toutes les propriétés assignées par Lorenz aux séries non convergentes (38) et (39), si l'on admet qu'elles sont convergentes, ce qui aura lieu, si la fonction $f(y, z)$ satisfait aux conditions nécessaires pour qu'elle puisse dans l'intervalle $0 < y < b$, $0 < z < c$ être développée en série suivant les cosinus et les sinus des multiples de $\frac{\pi y}{b}$ et de $\frac{\pi y}{c}$.

De plus on reconnaît que la fonction F est complètement déterminée dans l'intervalle

$$0 < x < a,$$
$$0 < y < b,$$
$$0 < z < c,$$

si dans cet intervalle elle satisfait aux conditions

$$\Delta^2 F = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{x=0} = f(y, z), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{x=a} = f_1(y, z),$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{y=0,b} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{z=0,c} = 0,$$

et si l'on suppose que dans cet intervalle cette fonction et ses dérivées puissent être développés en série suivant les cosinus et les sinus de smultiples de $\frac{\pi y}{b}$, $\frac{\pi z}{c}$ de la forme

$$F = \Sigma\Sigma A_{i_1, i_2} \cos\frac{\pi i_1 y}{b} \cos\frac{\pi i_2 z}{c}$$
$$+ \Sigma\Sigma B_{i_1, i_2} \sin\frac{\pi i_1 y}{b} \sin\frac{\pi i_2 z}{c}$$

les A et les B étant fonctions de x seulement. On voit immédiatement comme

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]^{y=0,b} = 0, \qquad \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]^{y=0,c} = 0,$$

que tous les B s'évanouissent.

Du plus on aura

$$\Delta_2 F(x) = \sum\sum\left[\frac{d^2 A_{i_1, i_2}}{dx^2} - p^2 A_{i_1, i_2}\right] \cos\frac{\pi i_1 y}{b} \cos\frac{\pi i_2 z}{c} = 0$$

et par conséquent

$$\frac{d^2 A_{i_1, i_2}}{dx^2} - p^2 A_{i_1, i_2} = 0,$$

$$A_{i_1, i_2} = c'_{i_1, i_2} e^{px} + c''_{i_1, i_2} e^{-px}.$$

Mais comme

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]^{x=0} = f(y, z) = \Sigma\Sigma p(c'_{i_1, i_2} - c''_{i_1, i_2}) \cos\frac{\pi i_1 y}{b} \cos\frac{\pi i_2 z}{c}$$

$$= \sum\sum \frac{1}{bc}\int_0^b d\beta \int_0^c d\gamma\, f(\beta, \gamma) \cos\frac{\pi i_1 y}{b} \cos\frac{\pi i_2 z}{c} \cos\frac{\pi i_1 \beta}{b} \cos\frac{\pi i_2 \gamma}{c},$$

on aura

$$c'_{i_1, i_2} - c''_{i_1, i_2} = \frac{1}{pbc}\int_0^b d\beta \int_0^c d\gamma\, f(\beta, \gamma) \cos\frac{\pi i_1 \beta}{b} \cos\frac{\pi i_2 \gamma}{c} = u.$$

De même on reconnaît que

$$c'_{i_1, i_2} e^{pa} - c''_{i_1, i_2} e^{-pa} = \frac{1}{pbc}\int_0^b d\beta \int_0^c d\gamma\, f_1(\beta, \gamma) \cos\frac{\pi i_1 \beta}{b} \cos\frac{\pi i_2 \gamma}{c} = v.$$

Des deux dernières équations on déduit

$$c'_{i_1, i_2} = \frac{v - ue^{-pa}}{e^{pa} - e^{-pa}}, \quad c''_{i_1, i_2} = \frac{v - ue^{pa}}{e^{pa} - e^{-pa}},$$

par où la fonction F est complètement déterminée.

On verra de la même manière que la fonction F_2 peut être déterminée, si l'on suppose qu'elle satisfait aux conditions

$$\Delta^2 F_2 = F,$$

$$\left[\frac{\partial F_2}{\partial y}\right]^{y=0,\,b} = 0, \quad \left[\frac{\partial F_2}{\partial z}\right]^{z=0,\,c} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}\right]^{x=0} = f(y, z), \quad \left[\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}\right]^{x=a} = f_1(y, z),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial F^2}{\partial x}\right]^{x=0,\,a} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]^{x=0,\,a} = 0$$

et de plus que cette fonction et ses dérivées peuvent être développées en séries suivant les cosinus et les sinus des multiples de $\frac{\pi y}{b}$, $\frac{\pi z}{c}$. On trouvera

$$F_2 = \Sigma\Sigma B_{i_1, i_2} \cos\frac{\pi i_1 y}{b} \cos\frac{\pi i_2 z}{c},$$

et comme $\Delta^2 F_2 = F$

$$\frac{d^2 B_{i_1, i_2}}{dx^2} - p^2 B_{i_1, i_2} = c'_{i_1, i_2} e^{px} + c''_{i_1, i_2} e^{-px},$$

et par suite

$$B_{i_1, i_2} = \frac{x}{2p}\left(c'_{i_1, i_2} e^{px} - c''_{i_1, i_2} e^{-px}\right) + g'_{i_1, i_2} e^{px} + g''_{i_1, i_2} e^{-px},$$

où g'_{i_1, i_2} et g''_{i_1, i_2} sont deux constantes nouvelles. Ces constantes peuvent être déterminées par les conditions

$\left[\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}\right]^{x=0} = f$ et $\left[\frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3}\right]^{x=a} = f_1$, par où l'on obtiendra la formule (41). $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ s'évanouit aussi bien pour $x = 0$ que pour $x = a$, et par conséquent $\frac{\partial^3 F_2}{\partial x \partial y^2}$ et $\frac{\partial^3 F_2}{dx\, dz^2}$ s'évanouiront aussi dans ces deux cas.

SUR

LE NOMBRE DES MOLÉCULES

CONTENUES DANS UN MILLIGRAMME D'EAU.

SUR LE NOMBRE DES MOLÉCULES CONTENUES DANS UN MILLIGRAMME D'EAU.

VIDENSK. SELSK. OVERS. 1870. P. 40—43.
ZUR MOLEKULARTHEORIE UND ELECTRICITETSLEHRE.
POGG. ANN. CLX. P. 644—647.*

* NOTE 1.

On a jusqu'ici cherché à calculer le nombre des molécules contenues dans un corps donné, ou du moins à en obtenir une évaluation passablement bien fondée en considérant seulement les forces moléculaires, leur grandeur et leur nature. A. Dupré a ainsi trouvé que le nombre des molécules contenues dans un milligramme d'eau est plus grand que $125 \cdot 10^{18}$ ($125 \cdot$ quintillions), ou, ce qui revient au même, que la distance de deux molécules voisines est moindre que $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10^6}$ mm ($\frac{1}{5}$ de millionnième de millimètre); et, d'après le calcul de W. Thomson, ces nombres sont environ $4000 \cdot 10^{18}$ et $\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{10^6}$ mm. Je suis, moi aussi, parvenu à des résultats analogues par une voie toute différente, en considérant la quantité d'électricité et la grandeur de la tension dont on a besoin pour la décomposition chimique de l'eau ou d'autres corps.

Comme mesure de l'intensité du courant électrique je me servirai, dans ce qui suit, de l'unité électromagnétique, et comme unité de quantité d'électricité je prendrai la quantité qui passe dans une seconde par chaque section transversale d'un conducteur parcouru par un courant dont l'intensité est l'unité. Par *quantité d'élec-*

tricité j'entends ici, en modifiant légèrement la conception ordinaire de cette quantité, la somme de la quantité d'électricité positive qui passe dans la direction positive et de la quantité d'électricité négative qui passe dans la direction inverse. La répulsion qui s'exerce entre deux corps contenant les quantités d'électricité e et e', et qui se trouvent à la distance r l'un de l'autre, peut alors être exprimée en unités absolues de force par

$$F = a^2 \frac{e e'}{r^2}, \quad \text{où} \quad a = 31074 \cdot 10^7.$$

La tension électrique d'un corps ou sa fonction potentielle peut être définie comme le travail nécessaire pour ajouter au corps une unité d'électricité.

Si p est la tension électrique et e la quantité d'électricité qu'il contient, un accroissement infiniment petit de sa quantité d'électricité de demanderait un travail $p\,de$; par conséquent le travail total correspondant à la tension p et à la quantité e est déterminé par l'équation

$$A = \int_0^e p\,de.$$

Si nous supposons, par exemple, que la distribution de la quantité d'électricité e est uniforme sur la surface d'une sphère, dont le rayon est δ, la tension sera

$$p = \frac{2 a^2 e}{\delta},$$

et le travail représenté par l'électricité sera dans ce cas

$$A = \frac{a^2 e^2}{\delta} = \frac{pe}{2}.$$

Le travail nécessaire à la décomposition d'un milligramme d'eau est accompli par un mécanisme dans

lequel une certaine quantité d'électricité subit une perte de tension.

D'après Weber et plusieurs autres physiciens cette quantité est 107 unités d'électricité. Par conséquent, si N est le nombre des molécules contenues dans un milligramme d'eau, et si e est la quantité d'électricité que chaque molécule doit recevoir et perdre ensuite pour être décomposée, on aura

$$Ne = 107.$$

De plus nous pouvons admettre avec Bosscha que la force électromotrice d'un élément de Daniell est en unités électromagnétiques

$$10258 \cdot 10^7,$$

nombre qui du reste peut aussi être déduit des expériences de Favre et Silbermann sur la quantité de chaleur produite par l'activité chimique d'un élément de Daniell. Cette force électromotrice est identique à la tension électrique, définie ci-dessus, du pôle positif d'un élément de Daniell, qui n'est pas fermé et dont le pôle négatif est dérivé à la terre.

La décomposition de l'eau exige une tension au moins 1,46 fois plus grande. Si elle est désignée par P, on obtiendra par conséquent

$$P = 15 \cdot 10^{10}.$$

De plus il existe une relation simple entre le nombre des molécules et la distance δ de deux molécules voisines. En effet, on peut admettre comme probable que les molécules d'eau sont disposées en ordre tétraèdral, en sorte que le volume d'un nombre donné de molécules

soit le plus petit possible pour une distance donnée de deux molécules voisines; de là résulte que

$$N = \frac{\sqrt{2}}{\delta^3}.$$

Or le travail chimique de la quantité d'électricité qu'a reçue une molécule doit s'opérer et pour cette raison il faut que cette quantité se répande de telle ou telle manière dans l'intérieur d'une sphère de diamètre δ qui entoure la molécule, cette sphère étant approximativement le volume correspondant à chaque molécule, si le volume du corps est divisé en N parties égales et si une molécule est placée au centre de chaque petit élément de volume. Mais le travail qui peut être accompli par la quantité d'électricité donnée sera aussi petit que possible, si l'électricité se trouve uniformément répandue à la surface de cette sphère. Car on reconnaît facilement qu'on ne peut pas changer cette distribution en une autre, sans qu'un travail s'opère; toute autre distribution de la même quantité d'électricité dans l'intérieur de la sphère exige donc un travail plus grand; et, par conséquent, il faut que l'électricité ait pour toute autre distribution une tension plus grande.

La tension correspondante à une distribution uniforme de la quantité e sur la surface d'une sphère de diamètre δ est, comme je l'ai dit ci-dessus, déterminée par l'équation

$$p = \frac{2a^2e}{\delta}.$$

Or la tension de la même quantité d'électricité, dans la distribution qui se produit en réalité, a été désignée ci-dessus par P.

Par conséquent on doit avoir

$$p < P,$$

d'où l'on conclut, au moyen des formules rapportées ci-dessus,

$$N > 1360 \cdot 10^{18} \quad \text{et} \quad \delta < \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10^6}^{\text{mm}}.$$

On reconnaît facilement qu'on obtiendra une limite supérieure de N, si l'on fait la supposition que la sphère d'action de l'électricité soit plus petite, (que ce soit, par exemple, la surface des atomes dont est composée la molécule d'eau) ou si l'on fait le même calcul pour d'autres corps, plus faciles à décomposer. Le même calcul, fait pour l'oxyde d'argent, par exemple, au lieu de l'eau, montre, avec une certaine probabilité, que la limite de N peut être supposée 27 fois plus grande que celle que nous avons trouvée ci-dessus ou bien que δ est 3 fois plus petit.

Il n'est peut être pas sans intérêt de remarquer, que, tandis que la quantité d'électricité e provenant d'une source d'électricité à tension constante P fait le travail Pe, si elle est amenée de la tension P à la tension 0, au contraire une molécule contenant la même quantité d'électricité e à la même tension P ne contiendra que la moitié de cette quantité de travail, savoir $\frac{Pe}{2}$, sous forme d'électricité. Par conséquent il peut se faire que de cette manière le travail de l'électricité soit perdu, jusqu'à concurrence de moitié, pour la décomposition chimique et se produise sous une autre forme, cas qui, à ce qu'il semble, peut précisément avoir lieu dans la décomposition électrolytique de l'eau.

NOTES.

NOTE 1. Une analyse se trouve dans les „Fortschritte d. Physik“, t. 26, p. 669—670.

DÉTERMINATION

DU DEGRÉ DE CHALEUR

EN MESURES ABSOLUES.

DÉTERMINATION DU DEGRÉ DE CHALEUR EN MESURES ABSOLUES.

VIDENSK. SELSK. OVERS. 1872. P. 1—21.
POGG. ANN. CLXII. P. 429—452. * * NOTE 1.
PHILOS. MAG. (4) XLVI. P. 62—77.

Rien n'a plus contribué, de nos jours, à éclaircir, indépendamment de toutes hypothèses physiques, la relation des forces différentes, que la détermination des quantités dépendantes de ces forces, au moyen des mêmes unités absolues. Mais, tandis qu'on a établi la théorie de la mesure absolue en ce qui concerne l'électricité et le magnétisme, au contraire le degré de chaleur n'a jusqu'ici été déterminé que d'une manière arbitraire; de sorte qu'on a, pour ainsi dire, tranché le lien qui rattache la chaleur aux autres forces physiques. C'est pourquoi j'ai entrepris, dans la présente recherche, d'établir d'une manière complètement expérimentale une définition du degré absolu de chaleur et de montrer l'emploi qu'on peut faire de cette définition pour éclaircir et préciser la relation qui existe entre l'électricité et la chaleur.

Nous nous servirons dans ce qui suit des unités absolues introduites par Gauss et Weber, à savoir du millimètre comme unité de longueur, de la seconde comme unité de temps et du milligramme comme unité de poids. En se servant de ces unités on a, comme on sait, défini l'unité électromagnétique de l'intensité d'un courant comme l'intensité d'un courant qui, en parcourant la cir-

conférence d'un cercle de surface égale à l'unité, influence le pôle d'un ainant comme un aimant infiniment petit dont le moment est l'unité. De plus Weber a choisi comme unité de masse d'électricité la quantité d'électricité positive, qui dans l'unité de temps traverse dans la direction positive une section d'un conducteur parcouru par un courant, dont l'intensité est l'unité, ce qui pourtant présuppose qu'en même temps la même quantité d'éléctricité négative passe dans la direction opposée. Nous considérerons pourtant dans ce qui suit, ainsi qu'on le fait d'habitude à présent, comme unité de masse d'électricité la somme des quantités d'électricité qui passent dans l'unité de temps par un conducteur dont l'intensité de courant est l'unité dans les directions opposées sans tenir compte des signes.

L'unité absolue de chaleur est définie comme la quantité de chaleur qui équivaut à l'unité absolue de travail. Or, si l'on veut définir un degré de chaleur par l'élévation de température que produit l'unité de chaleur sur l'unité de poids d'eau, le degré de chaleur sera pourtant déterminé arbitrairement, puisqu'il dépendra de la nature physique du corps choisi, à savoir de celle de l'eau. Si au contraire la quantité d'eau est remplacée par un certain nombre d'atomes d'un corps simple, l'élévation de température produite sur eux par une certaine quantité de chaleur sera, d'après la loi de Dulong et Petit, indépendante de la nature du corps choisi. Reste encore à déterminer plus précisément le nombre d'atomes qu'il faut choisir.

La loi citée n'est pourtant pas valable en toute rigueur pour les corps solides; mais les écarts ont, comme on sait, été expliqués par la supposition naturelle, qu'ici

la chaleur ne produit pas seulement une augmentation de la température, mais aussi un travail moléculaire intérieur. Au contraire la loi est certainement valable en toute rigueur pour tous les gaz, pour lesquels on peut supposer qu'aucune partie de la chaleur communiquée n'est employée à produire de travail intérieur. La perte de chaleur produite par le travail extérieur peut être évitée par le chauffage de l'air à volume constant.

D'après Regnault, la chaleur spécifique à volume constant est pour

l'azote	l'oxygène	l'hydrogène
0,24380,	0,21751,	3,40900.

Par conséquent une élévation de température d'un degré C. exige à pression constante pour

14mgr. d'azote	16mgr. d'oxygène	1mgr. d'hydrogène
3,41320,	3,48016,	3,40900,

unités relatives de chaleur (1mgr. d'eau 1° C.). Ces trois nombres, surtout le premier et le troisième, qui sont à peu près identiques, montrent, en concordance avec la loi de Dulong et Petit, qu'il faut la même quantité de chaleur pour faire monter d'un degré la température du même volume à la même pression, et par conséquent, d'après notre hypothèse, du même nombre d'atomes des corps choisis.

A volume constant la chaleur spécifique de ces gaz devient 1,40 fois plus petite (d'après les déterminations antérieures 1,41, et d'après la détermination de Regnault 1,3945); et, si l'on remplace les trois nombres cités par la moyenne des deux qui se rapprochent le plus (ceux qui correspondent à l'azote et l'hydrogène), à savoir par

3,4111,

on trouvera que

$$2{,}436 \text{ unités de chaleur } (1^{\text{mgr.}} \text{ d'eau } 1^\circ \text{ C.}),$$

est la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré C. à volume constant la température d'un nombre d'atomes d'un gaz permanent égal à celui des atomes qui se trouvent dans $1^{\text{mgr.}}$ d'hydrogène.

L'unité relative de chaleur, dont nous nous sommes servis ici, peut facilement être exprimée en unités absolues de travail, et nous l'appellerons A, quand elle sera exprimée de cette manière. L'unité citée est, comme on sait, équivalente à un travail de 433 milligrammètres, et comme le poids d'un milligramme est 9806 unités absolues, à savoir l'accélération de la pesanteur exprimée en millimètres, on aura

$$A = 425 \cdot 10^7 \text{ unités absolues.}$$

Pour échauffer $1^{\text{mgr.}}$ d'hydrogène de 1° C. à volume constant il faut par conséquent

$$2{,}436\, A = 1035 \cdot 10^7 \text{ unités absolues.}$$

De même qu'il faut une quantité déterminée de chaleur pour élever d'un degré la température du même nombre d'atomes de corps différents, de même, d'après la loi électrolytique de Faraday, il faut des quantités égales d'électricité pour dégager des quantités équivalentes d'un électrolyte. Mais, comme les masses équivalentes ne correspondent pas toujours au même nombre d'atomes, il sera nécessaire de choisir ici un type déterminé ou une norme de l'électrolyse.

Je prends pour type d'électrolyse celle des corps composés comme $R \cdot Cl$ (Br, J); en partie parce que le

même nombre d'atomes est dégagé aux deux pôles, en partie parce que nous avons ici le plus grand nombre d'atomes qui puisse être dégagé d'un électrolyte par une quantité donnée d'électricité. Tous écarts de la norme admise doivent donc être considérés comme produits par les actions secondaires des forces chimiques. Par exemple, quand on considère l'électrolyse de l'acide chlorhydrique concentré comme normale, l'électrolyse de l'eau est une dérogation à la règle, dérogation qu'on peut peut-être expliquer en supposant que deux atomes d'oxygène se combinent sous la forme gazeuse en un atome double.

A l'intérieur d'un voltamètre se dégage dans l'unité de temps $\frac{1}{960}$ mgr. d'hydrogène* sous l'action d'un courant d'intensité 1. Le même courant dégagera de l'acide chlorhydrique concentré le même poids d'hydrogène et un nombre équivalent d'atomes de chlore, et par conséquent aux deux pôles un nombre d'atomes simples égal au nombre de ceux qui se trouvent dans $\frac{1}{480}$ mgr. d'hydrogène. Pour échauffer le même nombre d'atomes de 1° C. à volume constant, il faut, d'après le résultat trouvé ci-dessus,

$$\frac{2{,}436}{480} A = 0{,}005075 A = 216 \cdot 10^5 \text{ unités absolues.}$$

Nous pouvons à présent définir *le degré de chaleur* en mesures absolues comme *l'élévation de température* que *l'unité de travail*, en se transformant complètement et exclusivement en chaleur, peut produire sur un *nombre d'atomes d'un corps simple égal à celui que l'unité d'électricité dégage d'un électrolyte normal.*

---

* Comparer: Wiedemann die Lehre vom Galvanismus. T. II, p. 917 et suivantes.

Cette élévation de température est, d'après ce que nous avons développé ci-dessus, égale à $\frac{1}{216 \cdot 10^5}$ Centigrades; par conséquent, on aura, en vertu de la définition admise:

$$1^\circ \text{ C.} = 0{,}005075\,A = 216 \cdot 10^5 \text{ unités abs.}$$

La relation entre la chaleur et de l'électricité, qui résulte de la loi de Dulong et Petit et de la loi électrolytique de Faraday, et dont nous nous sommes servis pour établir une définition du degré absolu de chaleur, n'est pas la seule connexion de ces deux agents physiques; car il en existe une autre, en vertu de la loi de Wiedemann et Franz, d'après laquelle le rapport des conductibilités de la chaleur et de l'électricité doit être le même pour les différents métaux. On a pourtant reconnu par des expériences ultérieures, que ce rapport varie avec la température et que par conséquent la loi ne peut être admise sous sa forme primitive et doit être modificée.

L'influence de la chaleur sur la conductibilité électrique a été élucidée par les travaux de plusieurs physiciens comme Lenz, Becquerel, Arndtsen, mais surtout par une série d'expériences de Matthiessen et v. Bose*, qui ont étudié la conductibilité de 10 métaux purs, savoir: argent, cuivre, or, zinc, cadmium, étain, plomb, arsenic, antimoine, bismuth. La conclusion remarquable qui résulta de ces expériences était que la diminution de la conductibilité électrique par l'échauffement de 0° à 100° C. est la même, 29,307 pour cent en moyenne, pour tous les métaux en question. La résistance de conductibilité

---

* Pogg. Ann. CXV, p. 353.

croît par conséquent de 41,46 pour cent par la même élévation de température, c'est-à-dire dans une proportion un peu plus forte que celle de la température (36,6 pour cent) si la température est comptée du zéro absolu (—273° C.). Plus tard Matthiessen et Vogt* ont trouvé que le fer fait exception à la loi suivie par les métaux purs, sa conductibilité pouvant être diminuée de plus de 38 pour cent.

On n'a fait que peu d'expériences relativement à l'influence de la température sur la conductibilité de la chaleur; mais on doit pourtant remarquer que toutes les expériences antérieures sont en bonne concordance pour confirmer la supposition, que la conductibilité ne dépend pas de la température. Ångström** a trouvé pour deux barres faites d'un cuivre, qui pourtant n'était vraisemblablement pas tout à fait pur, une diminution de la conductibilité calorifique, allant de 15 jusqu'à 21 pour cent entre 0° et 100° C. et pour le fer de 28,7 pour cent, tandis que Forbes*** a trouvé pour le fer forgé une diminution variant entre 15,7 et 22,3 pour cent.

Par conséquent, si nous remarquons que la conductibilité électrique est pour les différents métaux à peu près inversement proportionelle à la température comptée à partir du zéro absolu, tandis que leur conductibilité calorifique est plutôt approximativement constante, et que les écarts des deux espèces de conductibilité ont lieu dans le même sens, les faits cités semblent indiquer, avec l'approximation qu'on peut attendre ici, la loi sui-

---

* Pogg. Ann. CXVIII, p. 431.

** Öfversigt af K. Vetensk. Förhandl. 1862. Pogg. Ann. CXVIII, p. 423.

*** Edinb. Trans. 1862—64.

vante: *le rapport de la conductibilité calorifique d'un métal pur à sa conductibilité électrique est proportionnel à la température comptée à partir du zéro absolu.*

Pourtant ce rapport doit évidemment être modifié plus ou moins en plusieurs cas. Ainsi, si le métal n'est pas homogène ou s'il contient un mélange de métaux étrangers, et surtout dans les cas, où l'échauffement différent des différentes parties peut produire des courants thermoélectriques à l'intérieur du corps, la conductibilité calorifique sera vraisemblablement augmentée, ou, en tout cas, le rapport des deux conductibilités sera modifié. Un cas analogue se présentera sans doute à un haut degré, si la chaleur peut être propagée dans l'intérieur du corps comme chaleur rayonnante, et c'est dans cette propagation qu'on doit chercher l'explication du fait, que la conductibilité de tous corps transparents, translucides et surtout de tous corps non métalliques est évidemment plus grande que celle qui correspondrait à leur conductibilité électrique. Enfin le rapport doit pour les liquides être modifié à cause *de la mobilité des particules.*

Ainsi, si l'on chauffe une colonne de liquide par dessous, il va sans dire que cette mobilité augmentera la conductibilité calorifique observee et si elle est chauffée par dessus, on ne pourra pourtant pas éviter la production de courants dans l'intérieur du liquide. Chaque élément du liquide situé dans la même section horizontale ne peut avoir exactement la même température; les éléments les plus froids descendront vers le bas et les éléments les plus chauds monteront vers la source de chaleur, et la conductibilité calorifique sera dans ce cas diminuée par le mouvement.

On doit pour cette raison maintenir que la loi ne peut vraisemblablement être valable en toute rigueur que pour les métaux purs, homogènes et solides, si même elle est valable. En toute rigueur un échauffement inégal produirait une certaine non homogénéité du métal et pourrait produire des courants thermoélectriques.

Ces remarques faites, je chercherai à déterminer au moyen des expériences faites jusqu'ici pour les métaux le rapport des conductibilités calorifique et électrique exprimées en unités absolues. Il en ressortira le résultat remarquable, que ce rapport est précisément égal à la température comptée à partir du zéro absolu (—273° C.) en unités absolues, déterminées ci-dessus.

Pour déterminer la conductibilité calorifique en unités absolues, il faut connaître la quantité de chaleur qui passe par chaque unité de surface d'une plaque d'épaisseur donnée pour une différence donnée des températures des deux côtés de la plaque. Les expériences antérieures ont, à cause de circonstances très évidentes, donné des résultats discordants et trop petits. Par conséquent nous ne pourrons nous servir que des experiences récentes d'Ångström, de Forbes et de Neumann, qui concordent assez bien, quoique ces trois observateurs aient exécuté leurs expériences indépendamment les uns des autres et par des procédés très différents. Nous nous servirons provisoirement des unités choisies par Ångström: le centimètre, la minute, le centigrade et comme unité de chaleur la petite calorie (1gr. d'eau 1° C.).

Ångström* a trouvé que la conductibilité calorifique était pour:

---

* Pogg. Ann., t. CXVIII, p. 423 et t. CXXIII, p. 628.

le cuivre	58,94	à 0° C.
—	61,63	—
le fer	11,927	—
le mercure	1,061	á 50° C.

La dernière détermination a été faite sur une colonne de mercure renfermée dans un tube de verre qui fut chauffé par dessus.

Forbes a trouvé par les expériences mentionnées ci-dessus

fer	12,36	à 0° C.
—	12,42	—
—	9,21	—

Neumann* a déterminé la conductibilité calorifique pour 5 barres de métaux différents et de plus, en les comparant l'un avec l'autre, leur conductibilité électrique relative. Pour l'argent elle a été désignée par 100, et pour le cuivre elle a été évaluée à 73,3. Les résultats étaient, si nous nous servons des unités employées ci-dessus

	conductibilité calorifique	conductibilité électrique	rapport q
cuivre . . .	66,48	73,3	0,907
laiton . . .	18,12	17,9	1,012
zinc	18,43	21,1	0,873
argenton .	6,566	6,45	1,018
fer	9,824	10,2	0,963

Le rapport de la conductibilité calorifique à la conductibilité électrique, qui est désigné par q est le plus grand pour le laiton et l'argenton, ce qui n'est pas un

* Ann. de chim. 1862, p. 183.

fait fortuit, mais tient plutôt à ce qu'on n'opérait pas sur des métaux purs. De même on obtient, conformément à ce que nous avons expliqué plus haut, un résultat discordant et sans doute plus petit pour le mercure, auquel correspond en vertu des expériences d'Ångström $q = 0{,}655$, si l'on admet que la conductibilité électrique à 50° C. est égale à 1,62.

La moyenne des quotients q pour le cuivre, le zinc et le fer est d'après les expériences de Neumann 0,914. Il est difficile de décider si ce nombre doit être diminué ou augmenté, en tenant compte des expériences d'autres observateurs; or comme la conductibilité calorifique n'est pas réduite à 0° C. dans les expériences de Neumann, on doit pour cette raison supposer qu'il faut diminuer q un peu. On peut donc vraisemblablement admettre, que

$$q = 0{,}90 \text{ à } 0^\circ \text{ C.},$$

est le résultat qui peut être déduit avec la plus grande probabilité des expériences en question.

La valeur de q déterminée de cette manière est donc la conductibilité calorifique d'un métal, dont la conductibilité électrique est l'unité, exprimée dans les unités d'Ångström, si l'on pose la conductibilité électrique de l'argent égale à 100. Par chaque millimètre carré d'une plaque de conductibilité calorifique q et dont l'épaisseur est 1^{mm} il passe dans chaque seconde

$$q \cdot \frac{1}{100} \cdot 10 \cdot \frac{1}{60} = \frac{q}{600}$$

unités relatives de chaleur ($1^{gr.}$ d'eau 1° C.) pour une différence de température de 1° C. entre les deux côtés

de la plaque. Comme l'unité de chaleur employée ici est égale à $1000\,A$, et comme nous avons trouvé que 1° C. exprimé en unités absolues est égal à $0{,}005075\,A$, la conductibilité calorifique absolue correspondante à q, que nous désignerons par k_1, sera déterminée par

$$k_1 = \frac{q}{600} \cdot \frac{1000\,A}{0{,}005075\,A} = 328{,}4\,q.$$

On reconnaît par là que le facteur de réduction, par lequel la conductibilité évaluée en unités d'Angström est réduite aux mesures absolues, est indépendant de A.

Avec la valeur trouvée ci-dessus pour q on obtiendra

$$k_1 = 296.$$

Si l'on désigne la conductibilité électrique absolue correspondante par $\varkappa_1$, celle-ci, en vertu de la loi citée, sera donnée par

$$\frac{k_1}{\varkappa_1} = T,$$

si T est la température comptée à partir du zéro absolu et exprimée en unités absolues. Pour le point de congélation de l'eau T est égal à $273 \cdot 1°$ C., et si le centigrade est exprimé en unités absolues

$$T = 1{,}385\,A = 589 \cdot 10^7.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{\varkappa_1} = 0{,}00468\,A = 1{,}99 \cdot 10^7.$$

Pour déduire de là la résistance absolue d'une unité Siemens (une colonne de mercure longue d'un mètre, dont la section droite a 1^{mm} carré à 0° C.), il faut connaître le rapport de la conductibilité spécifique de l'argent

à celle du mercure; mais ce rapport varie assez avec l'état physique de l'argent, et même si l'on choisit, ce qu'on fait en général, l'argent sous forme d'un fil durci par étirement, on ne peut pas obtenir une grande précision dans la détermination de ce rapport. Dans l'ouvrage de Wiedemann „Die Lehre vom Galvanismus" (tome premier p. 181) on trouve les nombres 1,739 (E. Becquerel), 1,7 (Lamy), 1,63 (Matthiessen) pour la conductibilité du mercure, celle de l'argent étant 100. Plus tard Matthiessen* a indiqué le nombre 1,65 et les déterminations de Siemens** donnent 1,72 et 1,78. Ces nombres sont valables pour 0° C.

En conséquence nous supposerons que la conductibilité du mercure à 0° C. est égale à 1,72; par suite, la résistance évaluée en mesures absolues d'après le calcul fait ci-dessus, deviendra

$$\frac{1}{1{,}72\,\varkappa_1} = 0{,}00272\,A = 1{,}16 \cdot 10^7.$$

Il s'ensuit

$$S = 2{,}72\,A = 1{,}16 \cdot 10^{10},$$

si l'on désigne par S l'unité de résistance de Siemens exprimée en mesures absolues.

Nous comparerons ce résultat avec les mesures absolues directes de l'unité de résistance de Siemens qui ont été exécutées en partie au moyen de courants induits, en partie au moyen de la quantité de chaleur développée par un courant constant dans un conducteur. Par la première méthode Weber*** a trouvé

---

* Pogg. Ann., t. CXIV, p. 314; cfr. t. CXVI, p. 377.
** Pogg. Ann., t. CX, p. 18.
*** Abt. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1862.

$$S = 1{,}0257 \cdot 10^{10}$$

tandis que la commission nommée par la British association a trouvé comme moyenne

$$S = 0{,}964 \cdot 10^{10}.\,*$$

Une petite correction indiquée par Matthiessen** et qui diminue ces deux valeurs de 3 pour cent est ici sans conséquence.

Ces valeurs ne s'écartent pas beaucoup de la valeur trouvée plus haut au moyen de la conductibilité calorifique; mais elles sont pourtant toutes les deux un peu trop petites. On pourrait chercher la raison de cet écart dans la détermination assez peu précise, qu'on a jusqu'ici obtenue de la conductibilité calorifique des métaux, surtout en comparaison de leur conductibilité électrique; mais je crois pourtant qu'on en doit chercher la raison ailleurs.

La différence considérable des résultats trouvés par Weber, et par ladite commission, différence considérable, surtout en raison de la précision avec laquelle les expériences ont été exécutées, indique déjà une erreur qui ne peut être attribuée à des erreurs accidentelles d'observation, mais plutôt à une théorie incomplète, car l'écart en question s'élève en réalité à 8 pour cent. Il faut pour cette raison remarquer, *que les expériences ont été faites avec des courants induits à intensité variable*; mais il ressort avec vraisemblance de différentes recherches récentes, tant théoriques qu'expérimentales, que nous ne connaissons jusqu'ici la théorie des

---

* Reports of the 33th meeting of the B. Ass. 1863. Jenkin: Pogg. Ann., t. CXXVI, p. 369.

** Pogg. Ann, t. CXXV, p. 497.

courants induits variables que dans ses traits principaux, et que les résultats ne peuvent être considérés que comme une première approximation. Par conséquent on ne doit pas, malgré le grand soin apporté à l'exécution desdites expériences, attribuer une importance trop grande à leurs résultats.* * NOTE 2.

La détermination de la conduction électrique au moyen du développement de chaleur produit par un courant constant dans un conducteur est, quant à la théorie, beaucoup plus certaine et simple que la méthode d'induction, telle qu'elle a été employée jusqu'ici. Heureusement nous avons une longue série d'expériences, exécutées avec grand soin et calculées par Quintus Icilius*, pour déterminer le développement de chaleur produit de seconde en seconde par un courant à intensité constante dans différents fils de cuivre et de platine dont la résistance électrique était déterminée par comparaison avec un étalon gradué en unités absolues par Weber. Si l'on désigne par V le nombre d'unités relatives ($1^{mgr.}$ d'eau 1° C.) produit dans chaque seconde par un courant d'intensité s dans une unité de résistance de Siemens, on pourra par ces expériences déterminer la constante a définie par l'équation

$$V = a \cdot s^2 \, 1{,}0257 \cdot 10^{10},$$

si nous nous servons, comme l'a fait Qu. Icilius, de la détermination de la résistance électrique par Weber; tandis que nous aurons, si A désigne toujours l'équivalent absolu du travail de l'unité relative de chaleur ($1^{mgr.}$ d'eau 1° C.) et S la valeur absolue de l'unité de résistance de Siemens,

$$AV = s^2 S.$$

---

* Pogg. Ann., t. CI, p. 69.

De ces deux équations on peut déduire

$$S = aA \cdot 1{,}0257 \cdot 10^{10}.$$

Dans lesdites expériences, on s'est servi d'un calorimètre rempli de trois liquides différents, à savoir eau, alcool et huile de térébenthine. Le premier liquide l'importe sur les deux autres, en ce qu'il donne immédiatement la quantité de chaleur mesurée avec les unités choisies, mais d'autre part on ne peut pas ici éviter une petite erreur à cause de sa plus grande conductibilité électrique; d'où il résulte nécessairement que le développement de chaleur observé et par conséquent aussi la constante a sont trop petits. Les expériences faites avec l'alcool s'accordent si peu entre elles à cause de la volatilité de l'alcool, qu'elles doivent être négligées.

Comme moyenne de 28 expériences faites avec de l'eau on obtient

$$a = 2{,}543 \cdot 10^{-10},$$

et de 10 expériences faites avec de l'huite de térébenthine

$$a = 2{,}652 \cdot 10^{-10}.$$

La différence de ces deux valeurs de a n'est pas supérieure à ce qu'on pouvait attendre à cause de la plus grande conductibilité de l'eau; et, pour cette raison, on doit admettre que c'est le dernier nombre qui résulte avec la plus grande probabilité des expériences de Qu. Icilius.

Si l'on se sert de cette valeur on obtiendra

$$S = 2{,}720\,A = 1{,}16 \cdot 10^{10},$$

ce qui est, comme on voit, exactement la valeur même de l'unité de Siemens en mesures absolues que nous

avons déduite ci-dessus au moyen de la conductibilité calorifique des métaux. C'est là comme on le reconnaît, une coïncidence qui doit être considérée comme accidentelle.

Nous obtiendrons encore par un autre procédé une confirmation de la loi exposée; car nous trouverons que cette loi met en évidence la plus grande concordance avec *la loi de la propagation de l'énergie* dans les métaux, que cette propagation soit produite par la chaleur, ou qu'elle soit produite par le mouvement de l'électricité.

Par *énergie* on entend toute quantité qui peut être mesurée en unités de travail. Nous ne considérerons ici que la propagation de la chaleur ou de l'électricité en tant qu'elle se fait dans les deux cas par conduction; ainsi nous faisons abstraction de la propagation de la chaleur dans l'intérieur des corps par rayonnement ou par courants thermoélectriques, et de même, en ce qui concerne l'électricité, nous négligeons la propagation par induction ou par courants thermoélectriques.

Soit Q la quantité d'énergie contenue dans l'unité de volume d'un corps; l'accroissement $\frac{\partial Q}{\partial t} dt$ que reçoit Q par la conduction de chaleur dans l'unité de temps sous forme de chaleur sera déterminée par

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right), \qquad (1)$$

T étant la température, et k la conductibilité spécifique de la chaleur, qui en général doit être considérée comme une fonction de la température.

Si l'on pose ici, en vertu de la loi exposée,

$$k = \varkappa T,$$

$\varkappa$ étant la conductibilité électrique, on obtiendra

$$2\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial T^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial T^2}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial T^2}{\partial z}\right), \quad (2)$$

équation dans laquelle nous supposons que toutes les quantités sont exprimées en unités absolues.

Comme l'accroissement de l'énergie se présente ici seulement sous forme de chaleur, son rapport à l'accroissement de la température, qui dépend du poids et de la chaleur spécifique du corps, sera connu, et pour cette raison l'équation exprime complètement la loi de la propagation de la chaleur par conduction.

Soient u, v, w les composantes de la densité du courant électrique en un point (x, y, z) du corps; la quantité de chaleur reçue dans l'unité de temps sera, en vertu de la loi de Joule,

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{\varkappa}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Si l'élément de volume contient en même temps la quantité $\varepsilon\,dx\,dy\,dz$ d'électricité et si la tension électrique (le potentiel) au même point est P, l'élément recevra en même temps l'énergie

$$P\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

sous forme d'électricité.

Par conséquent, si Q désigne comme antérieurement la quantité d'énergie qui se trouve dans l'unité de volume, l'accroissement $\frac{\partial Q}{\partial t}\,dt$, produit par le mouvement de l'électricité et qui se présente en même temps sous forme de chaleur et d'électricité sera déterminé par

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = P\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^2}{\varkappa}. \quad (3)$$

De plus, en faisant abstraction de l'électricité produite par induction nous avons en vertu de la loi d'Ohm

$$u = -\varkappa \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = -\varkappa \frac{\partial P}{\partial y}, \quad w = -\varkappa \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad (4)$$

et aussi l'équation de Kirchhoff

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \qquad (5)$$

Par conséquent nous aurons

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z}\right),$$

d'où l'on déduira

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\left(\frac{\partial (uP)}{\partial x} + \frac{\partial (vP)}{\partial y} + \frac{\partial (wP)}{\partial z}\right). \qquad (6)$$

Si la propagation de l'électricité fait naître des forces électromotrices (thermoélectriques) dans l'intérieur du corps, ni la loi de Joule ni celle d'Ohm ne s'appliqueront à ces éléments. Toutefois il semble que la dernière équation conserve sa validité même dans ce cas, car elle concorde avec le fait qu'un courant constant, qui par une section droite du conducteur passe d'une tension électrique moindre à une tension plus grande, produira une absorption de chaleur proportionnelle à l'intensité du courant et à l'accroissement de la tension.

Nous faisons pourtant ici abstraction des courants thermoélectriques qui peuvent être produits dans l'intérieur du corps, et nous obtiendrons alors, en vertu de la dernière équation au moyen des equation (4),

$$2\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial P^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa \frac{\partial P^2}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa \frac{\partial P^2}{\partial z}\right). \qquad (7)$$

Si l'on compare cette équation avec l'équation (2), on reconnaîtra que les lois de la propagation de l'énergie par la conduction électrique et par la conduction de la chaleur ont absolument la même forme; la tension positive ou négative et la température comptée à partir du zéro absolu se correspondront l'une à l'autre et seront mesurées par les mêmes unités, si l'on choisit la mesure absolue du centigrade proposée ici. Un corps recevra en vertu de ces équations le même accroissement d'énergie dans chaque élément de volumen, qu'il ne soit pas électrisé et qu'il ait des températures différentes en des différentes parties, ou qu'il soit échauffé uniformement, et qu'il ait une tension électrique $\pm P$, dont la valeur numérique soit dans chaque point égale à T. Ici on suppose pourtant que $\varkappa$ ait dans les deux cas invariablement la même valeur, ce qui n'a lieu qu'approximativement. Dans l'instant qui suit, les deux cas différeront essentiellement, car l'accroissement de l'énergie du corps électrisé se présentera alors sous forme de chaleur et non de tension électrique.

Pour cette raison l'équation (7) n'exprime pas la loi de la propagation de l'électricité, mais seulement l'accroissement de l'énergie, tandis qu'au contraire, comme nous l'avons reconnu, la loi de la propagation de la chaleur est exprimée par l'équation (2) seule. Si l'électricité parcourt d'un mouvement permanent et sans interruption un corps — et c'est le seul cas qui puisse être traité ici, parce que nous faisons abstraction des courants induits — la quantité d'électricité sera toujours la même, et l'équation (5) donnera

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

équatiou qui, combinée avec les équations (4) donnera

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0. \qquad (8)$$

C'est donc cette équation qui, combinée avec les conditions aux limites, détermine la tension électrique

On suppose ici que le mouvement de l'électricité est permanent, et on doit donc, pour réaliser complètement ce cas, dériver la chaleur développee*, car c'est seulement sous cette forme que l'accroissement de l'énergie se présente ici. Pour pousser à bout l'analogie de la tension électrique et de la température, il faut admettre que les suppositions analogues ont lieu dans le cas du mouvement de la chaleur. Que ces suppositions ne puissent avoir lieu dans la réalité est ici sans conséquence.

* NOTE 3.

Nous faisons donc l'hypothèse d'un corps, dans lequel le mouvement de la chaleur est permanent, et dans lequel toute l'énergie, que peut produire la chaleur sous forme de travail en passant d'une température à une température plus basse, est dérivée de chaque point du corps et de cette manière ne se présente plus sous forme de chaleur.

Si la quantité de chaleur W à la température absolue T est dans chaque seconde continuellement communiquée au corps et si l'on dérive en même temps la quantité de chaleur W_1 à une température T_1, la température ne variera pas, si toute la différence $W-W_1$ est transformée en travail, et, d'après la théorie mécanique de la chaleur, on obtiendra tout le travail que peut produire W en passant de la température T à la température T_1 si l'on a

$$\frac{W}{T}=\frac{W_1}{T_1}. \qquad (9)$$

Si l'on pose, pour les trois faces contigues d'un parallélépipède rectangulaire infiniment petit,

$$\frac{W}{T} = \xi\, dy\, dz + \eta\, dx\, dz + \zeta\, dx\, dy,$$

on aura pour les trois autres faces

$$\frac{W_1}{T_1} = \left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx\right) dy\, dz + \left(\eta + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy\right) dx\, dz + \left(\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz\right) dx\, dy,$$

et l'équation (9) donnera alons

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \qquad (10)$$

Ici $T\xi dy dz$ est la quantité de chaleur qui dans l'unité de temps a traversé la surface $dy dz$; mais elle est aussi exprimée par $-k \frac{\partial T}{\partial x} dy\, dz$, si k est la conductibilité calorifique; par conséquent on aura

$$\xi = -\frac{k}{T} \frac{\partial T}{\partial x} = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x},$$

et de la même manière

$$\eta = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \zeta = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Ces équations doivent être combinées avec l'équation (10), ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0. \qquad (11)$$

De cette manière nous reconnaîtrons, que dans le cas hypothétique du mouvement particulier de la chaleur considéré ici, où les suppositions sont choisies en complète analogie avec les conditions effectivement réalisées

par le mouvement permanent de l'électricité, la température sera déterminée par la même équation différentielle (11) que la tension électrique (8).

Le mouvement permanent de l'électricité à travers un corps produit de la chaleur, qui finalement prendra elle même un mouvement permanent, si elle est continuellement dérivée de la même manière. L'accroissement de l'énergie, dû en même temps aux mouvements de l'électricité et de la chaleur, s'évanouira alors dans chaque elément du corps, et l'on obtiendra, en vertu des équations (2) et (7)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial(P^2+T^2)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial(P^2+T^2)}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial(P^2+T^2)}{\partial z}\right)=0, \quad (12)$$

équation qui, combinée avec les équations (8), déterminera en même temps la tension électrique P et la température absolue P, si les mouvements de l'électricité et de la chaleur sont tous deux devenus permanents.

Si l'électricité est conduite par une corps de telle manière qu'elle conserve toujours la même tension P_0 sur une petite partie σ_0 de sa surface et la tension P_1 sur une autre petite partie σ_1 et si l'on conserve en même temps à ces deux surfaces la même température T_0, le reste de la surface étant entouré de corps complètement mauvais conducteurs de l'électricité ou de la chaleur, on obtiendra finalement un mouvement permanent de l'électricité et de la chaleur, où l'électricité produira la même quantité de chaleur que celle qui est dérivée par les surfaces σ_0 et σ_1.

Si l'on pose

$$P^2+T^2+AP+B=\Phi, \quad (13)$$

A et B étant deux constantes arbitraires, on obtiendra au moyen des equations (12) et (8)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0. \qquad (14)$$

Puis les deux constantes A et B seront déterminées de manière qu'on ait $\Phi = 0$ sur les deux surfaces σ_0 et σ_1, ce qu'on obtiendra en posant

$$P_0^2+T_0^2+AP_0+B=0$$
$$P_1^2+T_0^2+AP_1+B=0.$$

Si l'on se sert des deux valeurs de A et de B déduites de ces équations, savoir

$$A=-(P_0+P_1), \qquad B=P_0P_1-T_0^2, \qquad (15)$$

on aura pour tous les points du corps

$$\Phi=0, \qquad (16)$$

par où l'on satisfait tant à l'équation (14) qu'aux conditions pour les limites σ_0 et σ_1, les conditions aux limites sur tout le reste de la surface, où $\varkappa = 0$, étant remplies par une valeur arbitraire de Φ, et par conséquent aussi par la valeur admise. Des équations (13), (15) et (16) on peut déduire

$$T^2-T_0^2=(P_0-P)(P-P_1). \qquad (17)$$

Par conséquent si un courant électrique constant est conduit pendant un temps suffisamment long, par un conducteur d'une forme quelconque entouré de corps très mauvais conducteurs de chaleur, et si la température des deux surfaces, par lesquelles le courant arrive au corps, est la même et constante, la température

du chaque point du conducteur peut être calculée par les différences de tension électrique du point considéré et de ces deux surfaces. Inversement le résultat trouvé peut servir à la détermination expérimentale du centigrade en unités absolues.

L'élévation de température, due au courant électrique, est $T - T_0$. Or on a

$$T^2 - T_0^2 > (T - T_0)^2,$$

et par conséquent, en vertu de la dernière équation,

$$(T - T_0)^2 < (P_0 - P)(P - P_1).$$

Comme le second membre a sa plus grande valeur pour $2P = P_0 + P_1$, on aura, si P_0 est supposé plus grand que P_1,

$$T - T_0 < \frac{P_0 - P_1}{2}. \qquad (18)$$

Il résulte de là que la plus grande élévation de température, qui puisse être produite en un point du conducteur, est toujours numériquement plus petite que la demi-différence des tensions électriques dans les deux surfaces par lesquelles entre l'électricité. Elle serait précisement égale à cette demi-différence, si l'on pouvait refroidir les surfaces jusqu'au zéro absolu, savoir pour $T_0 = 0$. La différence de tension électrique et la plus grande élévation de température qu'on peut produire ainsi sont donc intimément liées.

Pour cette raison il n'est pas sans intérêt de calculer la différence de tension électrique par exemple des pôles d'un élément galvanique, c'est-à-dire la force électromotrice de l'élément, en centigrades, de manière à exprimer par là la plus grande élévation de température,

que puisse produire cette différence de tension. La force d'un élément de Daniell est à peu près $12 \cdot 10^{10}$ unités absolues; la moitié de la différence de tension électrique des pôles, ou ce qu'on pourrait appeler la tension positive de l'élément est par conséquent $6 \cdot 10^{10}$ unités absolues (la tension négative ayant la même valeur), ou 2780° C., (1° C. étant égal à $216 \cdot 10^5$).

En conséquence c'est la plus grande différence de température, que l'élément puisse produire dans un conducteur par un courant constant, si l'on conserve la température de l'élément constante. En réalité cette élévation de température n'aurait lieu que si l'on pouvait refroidir l'élément ou ses pôles jusqu'au zéro absolu; si l'on fait la supposition qu'ils ont une température de 20° C. au-dessus du point de congélation de l'eau, on trouvera au moyen de l'équation (17) que le plus grande élévation de température est 2502° C.

Dans un élément thermoélectrique à pyrite de cuivre et cuivre, qu'a observé Bunsen*, la force électromotrice était presque $\frac{1}{10}$ de celle d'un élément de Daniell, et par conséquent la tension positive environ 278° C., quand une soudure était échauffée au point de fusion de l'étain et l'autre à 60° (environ) au-dessus du point de congélation de l'eau. En réalité la plus grande élévation de la température calculée comme ci-dessus serait à peu près 111° C.

On ne peut pourtant pas conclure de là que, par exemple, ce dernier élément ne pourrait pas produire une étincelle et par conséquent un échauffement beaucoup plus grand par l'interruption du conducteur; au contraire

* Pogg. Ann., t. CXXIII, p. 505.

je suis convaincu que cela est possible. Pour mettre en évidence la facilité remarquable avec laquelle se forment les étincelles électriques par l'interruption d'un conducteur, je citerai l'expérience suivante. Un courant électrique, dont l'intensité en mesures absolues était 20, fut conduit par un fil de cuivre épais de 1^{mm}. Il était en communication avec une tranchant d'acier coupant, au moyen duquel on traçait très rapidement des trachures sur une autre portion du fil. Dans l'obscurité complète on pouvait encore observer une lueur entre le tranchant d'acier et le fil de cuivre, quand la distance entre les deux points qui furent réunis n'était que 400^{mm}. La facilité avec laquelle se forme une étincelle par l'interruption du courant ne prouve pas autre chose, sinon qu'ici l'induction joue un rôle essentiel.

NOTES.

NOTE 1. Le mémoire n'est que cité dans les „Fortschritte der Physik“, t. 28 et 29.

NOTE 2. L'écart entre les résultats de Lorenz et ceux de Weber ou de la British association ne peut pas être expliqué de cette manière. Car d'après les expériences directes ultérieures, la valeur de S doit encore être diminuée. Voir les deux mémoires suivants.

NOTE 3. Dans le cas contraire la conductibilité électrique varierait.

LA RÉSISTANCE ELECTRIQUE DU MERCURE

EN MESURES ABSOLUES.

LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE DU MERCURE EN MESURES ABSOLUES.

VIDENSK. SELSK. OVERS. 1873. P. 67–84.
POGG. ANN. CXLIX. P. 251–269.*

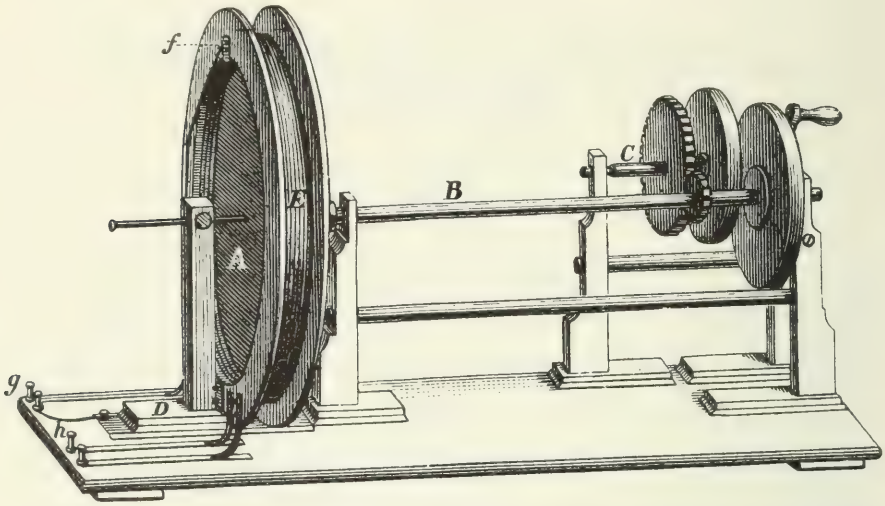
* NOTE 1.

Les déterminations de la résistance spécifique de la conductibilité électrique du mercure en mesures absolues, faites par Weber*, par la commission nommée par la British association** et récemment par Kohlrausch***, n'ont donné que des résultats assez discordants, nonobstant le grand soin qu'on a mis à faire les mesures. On s'est servi pour ces mesures de plusieurs procédés différents indiqués par Weber; mais ces procédés ont pourtant tous ceci de commun, qu'ils reposent sur l'application des courants induits à intensité variable. Comme j'ai soupçonné que cette circonstance était précisément la raison de ces écarts assez mystérieux, et comme, de plus, l'exécution des mesures qu'exigent ces méthodes présente des difficultés considérables, j'ai cherché à imaginer une méthode nouvelle, où l'on n'eût besoin que d'une force électromotrice constante sans courant, et où la détermination de la résistance de conduction, qui, en mesures électromagnétiques absolues, est une vitesse $\left(\frac{\text{Millimètre}}{\text{Seconde}}\right)$ fût aussi, dans l'exécution pratique de l'expérience, ramenée à la mesure d'une seule vitesse.

---

* Abh. der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1862.
** Rep. of the Brit. Ass. 1863, 1864.
*** Nachr. von d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1870.

L'appareil que j'ai fait construire a été exécuté dans l'atelier mécanique du professeur Jünger. Il est représenté dans la figure ci-dessous.



Un pisque de laiton *A*, de 200^{mm} de diamètre, est attaché au bont d'un axe *B*, très mobile, qui est mis en communication avec un autre axe, muni d'une manivelle, au moyen d'une roue d'engrenage et d'un pignon. A chaque axe est attaché un disque épais de laiton qui sert comme roue volante. Le disque *A* se meut dans l'intérieur d'un anneau d'acajou, dont le diamètre intérieur est juste assez grand pour permettre la rotation libre du disque. L'anneau, attaché à un support mobile *D*, peut être déplacé dans la direction de l'axe; il est entouré de couches très régulières d'un fil de cuivre, épais d'un millimètre et recouvert d'une double enveloppe de fils de soie. Le support *D*, qui permet de le déplacer, porte de plus un montant avec un mince bâton de laiton qui peut être déplacé, et dont le bout amalgamé et pointu peut être pressé contre le centre du disque tournant, ce qui établit une communication conductive entre le disque

et la vis de pression *g*. Une autre vis de pression située dans le voisinage de la première est mise au moyen d'un fil en communication conductive avec un ressort mince de laiton *f* qui traverse la surface intérieure de l'anneau et qui est pressé légèrement contre la circonférence du disque tournant. Deux autres vis de pression *h* sont en communication avec les deux bouts du fil qui entoure l'anneau.

Si un courant électrique est conduit par la bobine, et si l'on fait tourner le disque, une différence de tension électrique se produira par induction entre la circonférence et le centre du disque, et, s'ils sont mis en communication avec un multiplicateur au moyen d'une vis de pression, on observera une déviation de l'aiguille. On fait passer le courant primaire par le conducteur dont on veut déterminer la résistance, par exemple par une colonne de mercure contenue dans un tube cylindrique de verre et qui en deux points est dérivée par deux fils minces de platine, noyés dans la paroi du tube de verre. Ces deux fils sont reliés au conducteur qui est en communication avec le multiplicateur et le disque tournant, de manière que le courant dérivé du courant primitif, aussi bien que le courant induit par la rotation du disque, arrivent par le même conducteur au multiplicateur. Or on fait tourner le disque dans sens tel que ces deux courants deviennent opposés, et, en disposant convenablement de la vitesse de rotation, on peut faire qu'ils se détruisent mutuellement, de manière que l'aiguille du multiplicateur revienne au zéro. La vitesse de rotation ainsi trouvée donnera, à un facteur constant près, dépendant de l'appareil, la résistance de la colonne de mercure comprise entre les deux fils de platine, et

cette résistance sera évaluée en mesures absolues. En réalité, si w est cette résistance et si s est l'intensité du courant primitif, la différence des tensions électriques des deux fils est dans l'expérience en question sw.

Si de plus P est la constante de l'appareil, c'est-à-dire la différence des tensions électriques du centre du disque et de sa circonférence quand l'intensité du courant primitif est l'unité, et si l'on fait tourner le disque avec la vitesse uniforme d'une rotation par seconde, Psn sera la différence de tension induite dans l'expérience par n rotations en chaque seconde. On aura, par conséquent, si la déviation du multiplicateur est nulle, $sw = Psn$, d'où $w = Pn$. La résistance cherchée est donc indépendante de l'intensité du courant primitif, et les mesures sont pour cette raison réduites à la détermination de la constante P de l'appareil, qu'on fait une fois pour toutes, et à la détermination du nombre des rotations par seconde pour chaque résistance à mesurer.

J'avais primitivement l'intention de mesurer la vitesse de rotation du disque à l'aide d'un appareil électrique construit à cet effet; mais les expériences préliminaires montrèrent immédiatement qu'on pouvait obtenir une précision inattendue en faisant simplement tourner le disque avec la main et en comptant les rotations de la manivelle, pendant que le temps était indiqué par les coups d'une pendule battant la minute. Avec quelque exercice j'ai rapidement réduit les erreurs accidentelles sur la détermination du nombre des rotations à ne pas dépasser 0.2 pour cent, exactitude qui me semble suffisante.

Le disque tournant était, dans les expériences que je citerai, placé au milieu de la bobine. Comme source

de courant on s'est servi en général de quatre éléments de Bunsen; le courant d'un seul élément à bichromate de kali suffit pourtant. L'emploi de courants dont les intensités différaient n'a donné aucune différence dans les résultats, et la précision a été presque invariable, même quand on s'est servi de courants plus faibles. Le multiplicateur n'avait que peu de tours et était muni d'une aiguille double, dont la sensibilitité était augmentée par la présence d'un aimant à quelque distance du multiplicateur. La position de l'aiguille fut observée à l'aide d'un miroir fixe, placé au dessus de l'aiguille, et d'une lunette placée à l'endroit où se trouvait l'appareil de rotation. Celui-ci était éloigné de trois à quatre mètres du multiplicateur et sa position était telle, qu'un courant d'une grande intensité qui passait par la bobine ne produisait aucune action perceptible sur l'aiguille du multiplicateur.

Dans les expériences que j'ai faites, le courant dérivé du courant primitif a produit une déviation de l'aiguille du multiplicateur de 40° à 60°. Je faisais tourner l'appareil avec une main, pendant que j'observais les mouvements de l'aiguille du multiplicateur, en m'attachant à produire une vitesse de rotation telle que l'aiguille restât toujours au zéro; la plus légère irrégularité dans la rotation faisait passer l'aguille d'un côté à l'autre du zéro; mais avec un peu d'exercice on arrivait facilement à une régularité telle, que l'aiguille fût presque immobile pendant toute la durée de l'expérience.

Par la rotation du disque il se produisait un courant thermoélectrique, qu'on pouvait facilement observer en interrompant le courant primitif, et qui déviait l'aiguille du multiplicateur d'un degré environ. Pour cette raison on déplaçait le zéro du multiplicateur de manière

que l'aiguille indiquât dans chaque expérience le zéro, quand on avait interrompu le courant principal en continuant à faire tourner le disque avec la même vitesse. Au contraire l'action inductrice du magnétisme terrestre sur le disque tournant était tellement faible, qu'elle ne pouvait pas être manifestée par le multiplicateur.

Pour pouvoir en tout cas éliminer par les expériences elles mêmes l'influence des différentes sources d'erreurs, sur le résultat final, à savoir l'influence immédiate de la bobine sur le multiplicateur, des courants thermoélectriques et des forces inductrices du magnétisme terrestre, toutes les expériences ont été faites de la manière suivante. Après avoir fait tourner le disque, et avoir atteint la vitesse pour laquelle l'aiguille du multiplicateur indiquait continuellement le zéro, on a commencé à compter les rotations de la manivelle à partir d'un coup de minute de la pendule. Dans chaque minute suivante, on a observé le nombre entier le plus voisin du nombre des rotations en partant de zéro; puis, après avoir laisse s'écouler deux ou trois minutes, on a changé le sens du courant au moyen d'un commutateur, en continuant sans interruption à tourner et à compter les tours, pendant deux ou trois minutes. Au dernier coup de minute, on a supputé approximativement la fraction de la rotation inachevée. Puis on a un moment interrompu la rotation; les fils conducteurs du multiplicateur ont été échangés, de manière que la deviation de l'aiguille devînt égale et contraire à ce qu'elle était auparavant; le multiplicateur fut de nouveau réglé en faisant tourner le disque pendant que le courant primitif était interrompu, et l'expérience fut répétée de la même manière que ci-dessus.

Toutes les mesures de longueurs ont été faites avec un cathétomètre, dont j'avais muni la lunette de deux objectifs achromatiques, pour pouvoir placer l'objet à mesurer assez près de la lunette (150^{mm} à 200^{mm}). De cette manière j'ai atteint une exactitude plus grande que celle qu'on peut obtenir dans les mesures faites avec les cathétomètres ordinaires à des distances plus grandes, et je pouvais, en toute sûreté, mesurer même des longueurs très grandes avec une exactitude de $\frac{1}{100}^{mm}$.

En premier lieu, on a mesuré les dimensions du disque et de l'anneau; puis on a, au moyen d'un tour, enveloppé l'anneau avec le fil de cuivre (484 tours; 16 couches); ensuite cette bobine „intérieure", a été enveloppée de la même manière, après qu'on eût mesuré son diamètre, de 410 tours de fil de cuivre en 14 couches. Les mesures ont donné les résultats suivants:

épaisseur du disque	$3^{mm},40$
diamètre du disque	$200^{mm},00$
diamètre intérieur des tours de fil	$205^{mm},78$
diamètre de la bobine intérieure	$237^{mm},6$
diamètre de la bobine complète	$266^{mm},0$
largeur des tours	$36^{mm},5$.

De ces nombres on déduit, par un calcul qui sera détaillé plus loin, la valeur de la constante de l'appareil, qui pour la bobine intérieure était

$$1,3433 \cdot 10^6,$$

et pour la bobine complète

$$2,2115 \cdot 10^6.$$

Les mesures faites avec cet appareil ont avant tout eu pour but de déterminer la résistance de conductibilité

du mercure. Comme réservoirs du mercure on s'est servi de tubes de verre, rectilignes et cylindriques et dont l'un des bouts était fermé. Trois fils de platine étaient noyés dans les parois des tubes, l'un près du bout fermé et les deux autres, dont l'épaisseur n'était que de $0^{mm},20$, à une distance du fond d'environ $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ de la longueur du tube. Ils ne s'étendaient qu'à la paroi intérieure du tube de verre. Le mercure était purifié par l'acide nitrique dilué, dans lequel il était resté plongé pendant un laps de temps considérable, et j'ai trouvé que son poids spécifique à $5°,3$ C. était 13,586, ce qui correspond à 13,598 à 0° C., par conséquent presque exactement le nombre de Regnault.

Le calibrage a été fait de la manière suivante. Après avoir rempli le tube avec du mercure jusqu'au fil supérieur de platine, et après avoir fait disparaître toutes bulles d'air en secouant le tube pendant que l'air était aspiré par une machine pneumatique à mercure, on a placé le tube verticalement sur une base solide et mesuré la hauteur au cathétomètre. Puis on a enlevé une petite partie du mercure au moyen d'un tube rectiligne dont on s'est servi comme d'un siphon simple. Le mercure enlevé a été versé dans un verre et pesé. La hauteur du mercure fut mesurée, une nouvelle quantité fut enlevée et pesée avec la précédente, et ainsi de suite jusqu'à ce que la surface du mercure eût atteint le second fil de platine. Pour le tube n° 1 on a trouvé de cette manière:

h mm	p gr.	$\frac{\Delta h}{\Delta p}$
152,91	"	"
149,18	2,938	1,2696
144,55	6,355	1,3550
137,89	11,317	1,3422
130,30	16,980	1,3403
119,42	25,073	1,3444
108,77	33,010	1,3418
96,60	42,080	1,3418
83,28	51,992	1,3438
72,04	60,356	1,3439
60,60	68,848	1,3471
54,61	73,303	1,3445
52,15	75,113	1,3591
49,42	77,278	1,2610

Ici h désigne les hauteurs mesurées, p les poids de tout le mercure enlevé, Δh la différence de deux hauteurs consécutives et Δp la différence correspondante des poids. Les milieux des deux fils minces de platine se trouvaient, à leur insertion dans le tube à $151^{mm},18$ et $49^{mm},02$; leur distance était donc $102^{mm},16$.

La température du mercure était $8°,80$ C. Par ces mesures on trouve que la résistance de la colonne de mercure comprise entre les deux fils de platine était à 0° C. égale à

$$0,0018587 \; U.\,M,$$

où *U. M.* désigne l'unité de mercure introduite par Siemens, savoir la résistance d'une colonne de mercure dont la longueur est d'un mètre et dont la section transversale est d'un millimètre carré à 0° C.

De la même manière on a trouvé pour le tube n° 2 que la distance des deux fils de platine était $102^{mm},54$ et la résistance

$$0,0005826 \; U.\,M,$$

et pour le tube n° 3 la distance $156^{mm},06$ et la résistance

$$0,00079067 \; U. M.$$

Le tube n° 1 a été rempli complètement de mercure, et on a fait disparaître les bulles d'air de la manière dite ci-dessus. Puis il a été intercalé au moyen des deux fils de platine, l'un noyé dans le fond du tube, l'autre appliqué au bout ouvert, dans un conduit fermé d'un courant formé par quatre éléments de Bunsen, un commutateur et la bobine complète de l'appareil. Les deux fils de dérivation du tube furent mis en communication avec le disque de l'appareil et avec le multiplicateur, dont l'aiguille indiqua une déviation de 57°,5, avant qu'on eût fait tourner le disque. Le résultat de l'expérience faite de la manière indiquée ci-dessus était, pour une rotation continue de quatre minutes, précisément 117 rotations de la manivelle par minute; et, après avoir permuté les fils conducteurs du multiplicateur, on a obtenu le même résultat. La température du mercure était 6°,84 C. Dans une autre expérience, qui a donné exactement le même résultat, la température du mercure était 6°,40 C.; la moyenne de ces deux températures est 6°,62 C.

A chaque rotation de la manivelle correspondaient quatre rotations du disque. La pendule n'indiquait pas précisément le temps moyen; car entre deux battements de minute ne s'écoulèrent que 59,185 secondes. Le nombre de rotations du disque dans la seconde était donc dans l'expérience citée

$$\frac{4 \cdot 117}{59,185} = 7,9074,$$

d'où l'on déduit, en multipliant ce nombre par la constante correspondante à la bobine complète ($2{,}2115 \,.\, 10^6$), que la résistance du mercure en unités absolues est à $6^\circ{,}62$ C.

$$17{,}487 \,.\, 10^6.$$

Pour réduire cette résistance à 0°, il faut la multiplier par le binôme $1 - 0{,}00075\,t$, où $t = 6{,}62$. De plus si l'on désigne 10^{10} unités absolues de résistance $\left(\frac{\text{millimètre}}{\text{seconde}}\right)$ par *U. O.* (unité d'Ohm), on obtiendra

$$0{,}0018587 \; U.\,M. = 0{,}0017400 \; U.\,O.$$

Il s'ensuit que

$$1 \; U.\,M. = 0{,}9362 \; U.\,O.$$

Pour le tube numéro 2 on a trouvé, quand on avait intercalé seulement la bobine intérieure dans le circuit principal

$$60,\ 60,\ 61 \mid 60,\ 60,\ 61$$

rotations de la manivelle par un dénombrement continué pendant 6 minutes, au cours duquel on a commuté le courant primitif au bout de trois minutes; puis, après avoir échangé les fils conducteurs du multiplicateur,

$$60,\ 61,\ 60 \mid 60,\ 61,\ 60.$$

La température du mercure était $9^\circ{,}1$ C. On en déduit par un calcul analogue à celui qu'on a fait ci-dessus, comme la constante de la bobine intérieure est $1{,}3433 \cdot 10^6$,

$$1 \; U.\,M. = 0{,}9338 \; U.\,O.$$

Pour le même tube en relation avec la bobine complète, le nombre de rotations était

36, 37, 36 | 37, 37, 36
36, 36, 37 | 37, 37, $36\frac{3}{4}$

à 6°,60 C., d'où l'on déduit

$$1\ U.\ M. = 0{,}9339\ U.\ O.$$

Les expériences faites avec le tube numéro 3 en relation avec la seule bobine intérieure ont donné

81, 81, 82 | 81, 82, 82
81, 82, 81 | 81, 82, $82\frac{1}{4}$

rotations à 5°,22 C., et avec le même tube en relation avec la bobine complète

49, 50, 50 | 49, 49, 50
49, 50, 50 | 49, 49, 50

rotations à la même température. Les résultats calculés d'après ces données sont respectivement

$$1\ U.\ M. = 0{,}9324\ U.\ O.$$
$$1\ U.\ M. = 0{,}9320\ U.\ O.$$

La moyenne des cinq expériences est

$$1\ U.\ M. = 0{,}9337\ U.\ O.,$$

c'est-à-dire que l'unité de mercure est égale à $0{,}9337 \cdot 10^{10}$ *unités absolues.*

J'ai de plus cherché à déterminer la résistance d'un étalon de résistance de Siemens, qui équivalait à une unité de mercure. Mais je n'ai pas obtenu une grande précision par cette détermination, car la résistance était trop grande pour pouvoir être mesurée directement par mon appareil, et pour cette raison je ne m'arrêterai pas aux détails de ces recherches dont l'im-

portance n'est que secondaire. Pour faire la comparaison, je me suis servi d'un fil de cuivre long de 66^m, épais de $1^{mm},79$, dont la résistance specifique était, d'après des mesures faites en différents points du fil avec mon appareil, 193500 à $9^\circ,2$ C., 48,25 fois plus petite que celle du mercure à 0°. Ce fil fut par la méthode de Wheatstone comparé avec l'étalon, et l'on trouva que sa résistance était 0,943 *U. O.*

Le résultat obtenu ci-dessus par mes déterminations directes de la résistance absolue du mercure, où l'erreur commise ne peut guère excéder 0,2 pour cent, est plus petit d'environ 2 pour cent que la valeur trouvée par la commission anglaise (0,9629 et 0,9564 *U. O.*), qui elle-même est plus petite que les valeurs trouvées par l'autres observateurs, à l'exception de Kirchhoff*; car Weber et récemment Kohlrausch ont trouvé les valeurs 1,0257 et 0,9705 *U. O.*

J'ai donc obtenu par mes mesures une confirmation de la conjecture que j'ai faite au commencement de ce mémoire, à savoir que la divergence des résultats trouvés jusqu'ici provient de ce que les expériences ont été faites avec de courants induits à intensité variable. Cette supposition est déjà en partie confirmée par la série d'expériences publié par la commission anglaise (Rep. of Brit. Ass. 1864. Pogg. Ann., CXXVI); car les expériences faites avec des vitesses de rotation plus grandes donnent un résultat trop grand, et les autres un résultat trop petit en comparaison de la moyenne. Dans un mémoire antérieur „Détermination du degré de chaleur en mesures absolues“ (Overs. o. d. K. D. Vid. Selsk. Forh. 1872; c'est le

* Pogg. Ann., t. 76. Cf. Berliner Berichte 1851, p. 781.

UNIVERS

* NOTE 2. mémoire précédent)* j'ai déjà émis quelques doutes sur la valeur des mesures de résistance faites avec des courants variables, mais on reconnaît à présent que les déviations sont en sens inverse de celles que j'avais supposées alors. Comment se comporte le développement de chaleur par un courant électrique dans un conducteur dont la résistance est déterminée en unités absolues, c'est ce que devront éclaircir des expériences futures. D'après les expériences faites jusqu'ici par v. Quintus Icilius* et H. Weber** il semble que le développement de chaleur est supérieur à celui qu'indique la théorie.

Je ne ferai que mentionner en peu de mots quelques autres expériences que j'ai faites avec mon appareil. Si l'on interrompt le courant primitif pendant qu'on fait tourner le disque et pendant que l'aiguille du multiplicateur indique le zéro, l'aiguille recevra une impulsion qui produira une déviation de plusieurs degrés, et la direction de l'impulsion est telle que le courant dérivé l'emporte, au moment de l'interruption, sur le courant induit dans le disque tournant. On obtiendra un mouvement inverse si l'on ferme de nouveau le courant primitif. Ces courants momentanés remarquables ne peuvent guère être expliqués par l'induction que produit le changement brusque du courant primitif; mais, à ce qu'il me semble, ils doivent plutôt être attribués à une modification des lois de la distribution des courants dans la partie ramifiée du circuit lors d'un changement brusque du courant. Un courant primitif intermittent, produit par

---

* Pogg. Ann., t. CI.

** Inauguraldissertation. Leipzig 1863.

un interrupteur automatique intercalé dans le circuit, donne, a ce qu'il me semble, les mêmes résultats qu'un courant constant. Pour obtenir, dans les expériences de cette espèce, que la position de l'aiguille soit fixe, il importe d'avoir soin que le contact entre le disque et le ressort qui touche la circonférence du disque soit complet; c'est ce dont on peut facilement s'assurer en faisant tourner, par un courant primitif constant, le disque dans un sens tel, que le courant primitif et le courant induit se renforcent. Si l'on obtient dans ce cas une déviation plus grande, et qui en même temps reste constante, le contact peut être considéré comme complet; car, dans le cas contraire, l'aiguille serait très agitée. Mes expériences avec des courants intermittents ont bien donné un résultat supérieur de 1 pour cent à celui qui résulte des mesures faites avec un courant constant; mais j'attribue cet écart à des erreurs d'observation; car, dans ces expériences, il était très difficile de tenir l'aiguille en repos complet, et l'expérience m'a montré que j'avais une tendance à faire tourner le disque trop vite, quand l'aiguille n'était pas en repos.

Comme l'emploi des colonnes de mercure assez épaisses (7^{mm} à 14^{mm}) pouvait peut-être faire naître quelques doutes, j'ai exécuté quelques expériences pour examiner si la hauteur du mercure au dessus du fil de platine le plus élevé, par lequel le courant était dérivé, pouvait avoir quelque influence sur le résultat. Cette hauteur, dans les expériences décrites ci-dessus, était presque aussi grande que la distance des fils de platine, par lesquels le courant était dérivé. Or j'ai répété les expériences avec le tube numéro 3 et de plus petites colonnes de mercure, mais sans obtenir aucune change-

ment dans les résultats, sauf quand j'avais ôté tant de mercure que le reste pouvait à peine couvrir le fil de platine et que la coupole était élevée d'un millimètre environ au dessus du fil. Dans ce cas la résistance était de 1 pour cent plus petite que précédemment; c'est-à-dire que l'intensité électromotrice du courant dérivé était diminuée de 1 pour cent.

Plus tard j'ai trouvé par le calcul une confirmation de ce résultat, en déterminant le mouvement d'un courant électrique constant dans un cylindre circulaire droit quand le courant entre et sort des bases du cylindre par un fil conducteur. Comme ce calcul ne peut guère intéresser ici, je me bornerai à indiquer que ce problème peut être résolu en toute généralité au moyen des fonctions de Bessel.

Calcul des constantes du l'appareil.

Imaginons qu'un courant électrique, d'intensité égale à l'unité, soit conduit par un circuit circulaire et qu'un disque infiniment mince, concentrique et parallèle à ce circuit tourne avec une vitesse uniforme de 1 tour par seconde. Il se produira alors dans ce disque par induction une différence de tension électrique p entre le centre et la circonférence. Pour calculer cette quantité p on peut imaginer que, dans chaque seconde, une unité de masse d'électricité est conduite du centre du disque à la circonférence, pendant que le disque tourne dans la même direction que le courant dans le circuit circulaire et immobile. Le travail nécessaire pour contrebalancer, pendant chaque rotation complète, la résistance

électrodynamique sera alors égal à la différence de tension cherchée p.

Comme la masse totale d'électricité conduite du centre du disque à la circonférence passe par chaque cercle concentrique à la circonférence, et comme l'influence du conducteur immobile est la même en chaque point d'un tel cercle, on peut aussi bien imaginer que l'électricité est conduite par un conducteur linéaire du centre du disque à la circonférence, et p sera alors le travail nécessaire pour faire accomplir une rotation complète à ce conducteur radial par lequel passe un courant d'intensité égale à 1.

Soient r le rayon du disque, R le rayon du conducteur circulaire et a la distance du plan du disque à celui du conducteur. En partant des lois électrodynamiques connues, on trouvera que le travail cherché et par conséquent p est déterminé par la formule* * NOTE 3.

$$p = 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \frac{rR\cos\theta}{\sqrt{R^2+r^2+a^2-2Rr\cos\theta}}.$$

On pose ici

$$c = \frac{(R-r)^2+a^2}{(R+r)^2+a^2}, \quad c' = 1-c = \frac{4Rr}{(R+r)^2+a^2}, \quad \theta = \pi - 2\varphi,$$

et l'expression peut s'écrire sous la forme

$$p = 4\pi\sqrt{rRc'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1-c'\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on introduit ici les notations bien connues de la théorie des fonctions elliptiques,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c \sin^2 \varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c' \sin^2 \varphi}},$$

$$E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - c' \sin^2 \varphi},$$

on obtiendra

$$p = 4\pi \sqrt{r R c'} \left[\frac{2 - c'}{c'} K' - \frac{2}{c'} E' \right]$$

* NOTE 4. Mais, comme on sait*

$$E' = c K' - 2 c c' \frac{dK'}{dc},$$

et par conséquent

$$p = 4\pi \sqrt{r R c'} \left[K' + 4 c \frac{dK'}{dc} \right].$$

Nous considérerons c comme une quantité assez petite, et nous chercherons à développer K' en série suivant les puissances croissantes de $c = 1 - c'$. A cet effet, on peut se servir d'une relation bien connue dans la théorie des fonctions elliptiques, à savoir

$$c c' \left(K' \frac{dK}{dc} - K \frac{dK'}{dc} \right) = \frac{\pi}{4},$$

d'où

$$K' = -\frac{\pi}{4} K \int \frac{dc}{c c' K^2}.$$

Dans cette intégrale indéfinie, la constante est déterminée par la valeur limite $K' = \frac{1}{2} l \frac{16}{c}$, valable pour une valeur infiniment petite de c. Si K est développé en série suivant les puissances croissantes de c, à savoir

$$K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{2^2} c + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} c^2 + \ldots \right],$$

on obtiendra

$$K' = \frac{1}{2} l \frac{16}{c} \left[1 + \frac{1}{4} c + \frac{9}{64} c^2 \ldots \right] - \frac{1}{4} c - \frac{21}{128} c^2 \ldots,$$

et si l'on introduit cette valeur dans l'expression de p, on trouvera

$$p = 2\pi \sqrt{rR} \left[l \frac{16}{c} \left(1 + \frac{3}{4} c + \frac{33}{64} c^2 + \ldots \right) - 4 - \frac{3}{2} c - \frac{81}{64} c^2 - \ldots \right].$$

Nous remplacerons à présent le conducteur circulaire et linéaire par un anneau, concentrique avec lui, à section rectangulaire et que traverse une quantité d'électricité m fois plus grande. Soient R_1 et R_2 les rayons des surfaces cylindriques, intérieure et extérieure, de cet anneau; et soient a_1 et a_2 les distances des bases de l'anneau au plan du disque tournant. Si l'on désigne par P la différence des tensions au centre et à la circonférence du disque, on aura * * NOTE 5

$$P = m \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R_2 - R_1} \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a_2 - a_1} p.$$

On pose ici

$$R = r(1 + \beta), \quad a = r\alpha,$$

et par conséquent

$$c = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4(1+\beta)} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{16(1+\beta)^2}.$$

Il faut alors en premier lieu déterminer les fonctions $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$ qui entrent dans l'intégrale double

$$\int d\alpha \int d\beta p = 2\pi r \left[A(\alpha, \beta) l \frac{64}{\alpha^2 + \beta^2} + B(\alpha, \beta) \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} + C(\alpha, \beta) \right]$$

* NOTE 6. On trouvera*

$$A(\alpha,\beta) = \alpha\beta + \frac{1}{4}\alpha\beta^2 + \frac{1}{12}\alpha^3 + \frac{1}{48}\alpha\beta^3 + \frac{1}{16}\alpha^3\beta - \frac{1}{128}\alpha(\alpha^2+\beta^2)^2 + \ldots,$$

$$B(\alpha,\beta) = \alpha^2 - \beta^2 - \frac{1}{3}\beta^3 + \frac{1}{12}\alpha^4 \ldots,$$

$$C(\alpha,\beta) = -\alpha\beta + \frac{1}{12}\alpha\beta^2 + \frac{5}{36}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\alpha^3\beta - \frac{11}{768}\alpha\beta^4 + \frac{3}{128}\alpha^3\beta^2 - \ldots.$$

Au moyen de ces formules on peut calculer l'intégrale définie P. En effet, si l'on pose

$R_1 = r(1+\beta_1)$, $R_2 = r(1+\beta_2)$, $a_1 = r\alpha_1$, $a_2 = r\alpha_2$,

et si l'on désigne par $P(\alpha,\beta)$ l'intégrale $\int d\alpha \int d\beta\, p$, P sera exprimée par

$$P = \frac{m}{(\beta_2-\beta_1)(\alpha_2-\alpha_1)}[P(\alpha_2,\beta_2) - P(\alpha_1,\beta_2) - P(\alpha_2,\beta_1) + P(\alpha_1,\beta_1)].$$

On a supposé ici l'épaisseur du disque infiniment petite. Si nous supposons qu'il ait été déplacé d'une longueur x dans la direction de l'axe des x, a_1 sera remplacé par $a_1 - x$ et a_2 par $a_2 - x$ et l'expression précédente de P par

$$m\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R_2 - R_1} \int_{a_1-x}^{a_2-x} \frac{da}{a_2 - a_1} p.$$

Par conséquent, si l'épaisseur du disque est 2ε, P sera remplacé par la quantité

$$m\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{dx}{2\varepsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R_2 - R_1} \int_{a_1-x}^{a_2-x} \frac{da}{a_2 - a_1} p,$$

car x prendra toutes les valeurs de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, et les distances a_2 et a_1 sont comptées à partir du plan $x = 0$.

Si ε est une quantité petite, la dernière expression peut approximativement être égalée à

$$P + \frac{\varepsilon^2 m}{6} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R_2 - R_1} \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a_2 - a_1} \frac{d^2 p}{da^2},$$

et par conséquent on doit ajouter à l'expression de $P(\alpha, \beta)$ trouvée ci-dessus la correction

$$\frac{\varepsilon^2}{6r^2} \frac{d^2 P(\alpha, \beta)}{d\alpha^2}.$$

Enfin une bobine remplace dans l'appareil l'anneau conducteur du calcul précédent. Si le nombre de tours de la bobine est m, et si l'unité de masse d'électricité passe en chaque seconde par chaque tour, m unités d'électricité passeront dans chaque seconde par la section de la bobine, ce qui est la même masse d'électricité que celle qui passait, d'après notre supposition, par la section de l'anneau. La seule différence entre l'anneau et la bobine consiste en ce qu'il existe, dans cette la dernière, des espaces non conducteurs entre les tours de fil. La correction de $P(\alpha, \beta)$ qui s'ensuit est pourtant sans conséquence dans le cas en question et pour cette raison je me bornerai à indiquer le résultat de ce calcul, à savoir qu'il faut ajouter à $P(\alpha, \beta)$ la correction

$$-\frac{\eta^2}{24r^2}\left(\frac{\partial^2 P(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 P(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2}\right),^*$$ * NOTE 7.

si le fil de la bobine est linéaire et si η est la distance de deux tours voisins. Cette correction n'excède pas 0,01 pour cent; et, comme le fil a une épaisseur appréciable, la correction est en réalité encore plus petite.

Dans l'appareil en question, on a pour la bobine complète

$$m = 894, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 = 0{,}1825, \quad \beta_2 = 0{,}330,$$
$$\beta_1 = 0{,}0289, \quad \varepsilon = 0{,}017, \quad \eta = 0{,}0118,$$

et pour la bobine intérieure

$$m = 484, \quad \beta_2 = 0{,}188,$$

les autres quantités ayant les valeurs indiquées ci-dessus.

On trouve dans le premier cas

$$P = 2{,}2124 \cdot 10^6,$$

et la correction pour l'épaisseur du disque $-0{,}04$ pour cent.

Pour la bobine intérieure on trouve

$$P = 1{,}3440 \cdot 10^6.$$

La correction est $-0{,}05$ pour cent.

NOTES.

NOTE 1. Une analyse de ce mémoire se trouve dans les „Fortschritte d. Phys., t. XXIV, p. 731.

NOTE 2. Comparer le précédent mémoire, p. 70.

NOTE 3. L'expression de p peut être obtenue de la manière suivante. On sait que le potentiel d'un circuit linéaire sur un autre circuit linéaire peut être exprimé par

$$\iint \frac{ds\,ds' \cos \varepsilon}{\rho},$$

l'intégration étant étendue aux deux circuits, dont ds et ds' sont deux éléments; ρ est leur distance et ε l'angle que fait ds avec ds'.

Le travail exécuté par le mouvement d'un circuit sera donc la variation de l'intégrale double produite par ce mouvement. Or le disque tournant peut, d'après la théorie développée dans le texte, être remplacé par un conducteur linéaire qui va du centre à la circonférence, et comme le mouvement de l'électricité dans le disque peut être considéré comme indifférent pourvu qu'une unité d'électricité passe dans chaque seconde du centre à la circonférence, on peut se figurer que l'électricité passe du centre à la circonférence de long d'un rayon fixe, puis suive la circonférence jusqu'au point de dérivation.

On reconnaîtra alors que, si le disque tourne d'un angle $d\theta'$, la seule variation de l'intégrale double proviendra de ce que la partie de la circonférence entre le rayon fixe et le point de dérivation est augmentée de $r\,d\theta'$.

Par conséquent on aura

$$dp = \int_0^{2\pi} \frac{rR\,d\theta\,d\theta'\cos\theta}{\sqrt{R^2+r^2+a^2-2Rr\cos\theta}},$$

$$p = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Rr\,d\theta\,d\theta'\cos\theta}{\sqrt{R^2+r^2+a^2-2Rr\cos\theta}}$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} \frac{Rr\,d\theta\cos\theta}{\sqrt{R^2+r^2+a^2-2Rr\cos\theta}}.$$

NOTE 4. Les formules sont bien connues dans la théorie des fonctions elliptiques; mais elles peuvent, facilement être établies d'une manière directe. En effet on a

$$E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c'\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\,(1-c'\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-c'\sin^2\varphi}} = K'-c'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-c'\sin^2\varphi}},$$

et, en intégrant par parties,

$$E' = K'-c'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(\sqrt{1-c'\sin^2\varphi})^3}.$$

Mais on reconnaît immédiatement, comme $c+c'=1$, que

$$c'\frac{dK'}{dc} = -\frac{c'}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(\sqrt{1-c'\sin^2\varphi})^3}$$

$$= \frac{1}{2}K' - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\sqrt{1-c'\sin^2\varphi})^3},$$

et par conséquent

$$c'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(\sqrt{1-c'\sin^2\varphi})^3} = c'K' + 2cc'\frac{dK'}{dc},$$

$$E' = cK' - 2cc'\frac{dK'}{dc}.$$

On a de plus

$$\frac{dE'}{dc} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\sqrt{1-c'\sin^2\varphi}},$$

$$2c'\frac{dE'}{dc} = K' - E',$$

et, en vertu de l'équation précédente,

$$\frac{dE'}{dc} = K' + (3c - 2c')\frac{dK'}{dc} - 2cc'\frac{d^2K'}{dc^2}.$$

On en déduit l'équation différentielle

$$K' + 4(c - c')\frac{dK'}{dc} - 4cc'\frac{d^2K'}{dc^2} = 0.$$

Mais K satisfait à la même équation différentielle. On aura donc

$$4cc'\left(K\frac{d^2K'}{dc^2} - K'\frac{d^2K}{dc^2}\right) = 4(c-c')\left(K\frac{dK'}{dc} - K'\frac{dK}{dc}\right),$$

et, en désignant par u la quantité $K\frac{dK'}{dc} - K'\frac{dK}{dc}$,

$$\frac{dlu}{dc} = \frac{1}{c'} - \frac{1}{c},$$

$$u = \frac{k}{cc'},$$

où k est une constante. Cette constante peut être déterminée en remarquant que

$$4cc'\frac{dK'}{dc} = 2cK' - 2E',$$

$$4cc'\frac{dK}{dc} = -2c'K + 2E,$$

$$4cc'\left(K\frac{dK'}{dc} - K'\frac{dK}{dc}\right) = 2KK' - 2KE' - 2K'E.$$

Si l'on pose ici $c' = 0$, on aura $K' = \frac{\pi}{2}$, $E = 1$,

$$2K(K' - E') = 4Kc'\frac{dE'}{dc}.$$

Mais $\frac{dE'}{dc} = \frac{\pi}{8}$ pour $c' = 0$, et il faut calculer la valeur limite de $c'K$ pour $c' = 0$. On a

$$c'K = c'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + c'\sin^2\varphi}} = c'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + c'\cos^2\varphi}}.$$

Mais si c' est très petit, ce ne sont que les éléments de l'intégrale correspondant à φ très petit qui peuvent influencer le résultat; l'autre partie de l'intégrale s'évanouira, étant multipliée par c'. On peut donc sans erreur sensible remplacer $c'K$ par

$$c'\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + c'\cos^2\varphi}},$$

ou φ est très petit.

Mais φ étant très petit, on peut remplacer $\sin\varphi$ par φ, $\cos\varphi$ par 1; par où l'on obtiendra

$$c'K = c'l\left(\frac{\varphi}{\sqrt{c'}} + \sqrt{\frac{\varphi^2}{c'} + 1}\right),$$

expression qui s'évanouit en même temps que c'. Par conséquent on aura

$$cc'\left(K'\frac{dK}{dc} - K\frac{dK'}{dc}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Enfin le calcul approximatif de K pour c' très petit peut se faire de la manière suivante.

On a

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + c'\cos^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + c'\cos^2\varphi}} + \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + c'\cos^2\varphi}}.$$

Si l'on suppose ici que ψ est très petit; mais qu'il est pourtant grand en comparaison de c', la première intégrale peut être exprimée comme ci-dessus par

$$l\left(\frac{\psi}{\sqrt{c'}} + \sqrt{\frac{\psi^2}{c'} + 1}\right),$$

expression qui approximativement peut être égalée à $l\frac{2\psi}{\sqrt{c'}}$.

Dans la seconde intégrale on peut négliger le terme $c'\cos^2\varphi$, ce qui la réduit sensiblement à

$$\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -l(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi) = -l(\tfrac{1}{2}\psi).$$

Par conséquent on aura approximativement

$$K = l\frac{4}{\sqrt{c'}} = \frac{1}{2}l\frac{16}{c'}.$$

NOTE 5. On suppose ici que les mêmes quantités d'électricité passent toujours par les éléments également grands d'une section du conducteur. Sur la plausibilité de cette hypothèse voir la fin du mémoire suivant.

NOTE 6. On reconnaît facilement que le résultat ne contiendra que des termes de la forme

$$A(\alpha,\beta)\, l\frac{64}{\alpha^2+\beta^2}, \quad B(\alpha,\beta)\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}, \quad C(\alpha,\beta),$$

où $A(\alpha,\beta)$, $B(\alpha,\beta)$, $C(\alpha,\beta)$ sont des séries procédant suivant les puissances croissantes de α et β. Si l'on néglige dans le résultat les termes dont le degré est supérieur à 5, on n'a besoin dans l'expression de p que des termes qui sont au plus du dégré 3, et dans cette supposition on trouvera

$$p = 2\pi r\left[l\frac{64}{\alpha^2+\beta^2}\left(1+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{16}\beta^2-\frac{1}{32}\beta^3+\frac{3}{16}\alpha^2-\frac{3}{32}\alpha^2\beta\right)\right.$$
$$\left.-4-\beta+\frac{3}{8}\beta^2-\frac{1}{24}\beta^3-\frac{1}{8}\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha^2\beta\right].$$

Pour faciliter l'intégration je donnerai ici les formules suivantes (où sont négligées les fonctions arbitraires),

$$\iint l\frac{64}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha\,d\beta = \alpha\beta\, l\frac{64}{\alpha^2+\beta^2}-(\alpha^2-\beta^2)\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}+3\alpha\beta,$$

$$\iint \alpha\, l\frac{64}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha\,d\beta = \frac{3\alpha^2\beta+\beta^3}{6}\, l\frac{64}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{2}{3}\alpha^3\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$$
$$+\frac{7}{6}\alpha^2\beta,$$

$$\iint \alpha^2 l\frac{64}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha\,d\beta = \frac{\alpha^3\beta}{3}\, l\frac{64}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta^4+3\alpha^4}{6}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$$
$$+\frac{13}{18}\alpha^3\beta-\frac{1}{6}\alpha\beta^3,$$

$$\iint \alpha^3 l \frac{64}{\alpha^2+\beta^2} d\alpha d\beta = \frac{5\alpha^4\beta-\beta^5}{20} l \frac{64}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{2}{5}\alpha^5 \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$$
$$+\frac{21}{40}\alpha^4\beta - \frac{1}{20}\beta^3\alpha^2,$$

$$\iint \alpha^2\beta l \frac{64}{\alpha^2+\beta^2} d\alpha d\beta = \frac{5\alpha^3\beta^2+3\alpha^5}{30} l \frac{64}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{2}{15}\beta^5 \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$$
$$+\frac{19}{90}\alpha^3\beta^2 - \frac{2}{15}\beta^4\alpha.$$

NOTE 7. Pour déterminer la correction qu'il faut ajouter, nous calculerons d'abord la correction dans le cas où un conducteur linéaire et circulaire de rayon R, situé à la distance a du plan de disque, est remplacé par un anneau à section carrée dont le côté est η. Nous supposerons de plus que le conducteur passe par les centres de toutes les sections carrées de l'anneau. La correction sera alors

$$d = p - \frac{1}{\eta^2}\int_{R-\frac{\eta}{2}}^{R+\frac{\eta}{2}} dR \int_{a-\frac{\eta}{2}}^{a+\frac{\eta}{2}} da\, p$$

$$= p - \frac{2\pi}{\eta^2}\int_{-\frac{\eta}{2}}^{+\frac{\eta}{2}} dx \int_{-\frac{\eta}{2}}^{+\frac{\eta}{2}} dy \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(R+x)\cos\theta\, r}{\sqrt{(R+x)^2+r^2+(a+y)^2-2(R+x)r\cos\theta}}.$$

Si l'on développe le dernier terme en série suivant les puissances de x et y, et si l'on effectue l'intégration, on verra que le premier terme qui ne s'évannouira pas sera

$$-\frac{\eta^2}{24}\left[\frac{d^2p}{dR^2}+\frac{d^2p}{da^2}\right];$$

telle est donc approximativement la correction qu'il faut ajouter pour un seul tour.

La correction pour tous les tours sera par conséquent

$$-\frac{\eta^2}{24}\sum\left[\frac{d^2p}{dR^2}+\frac{d^2p}{da^2}\right],$$

ou si la sommation est remplacée par une intégration

$$-\frac{\eta^2}{24}\frac{m}{(R_2-R_1)(a_2-a_1)}\int_{R_1}^{R_2}dR\int_{a_1}^{a_2}da\left[\frac{d^2p}{dR^2}+\frac{d^2p}{da^2}\right],$$

ce qui donnera immédiatement la correction indiquée par Lorenz.

SUR LES MÉTHODES A EMPLOYER

POUR

LA DÉTERMINATION DE L'OHM.

SUR LES MÉTHODES A EMPLOYER POUR LA DÉTERMINATION DE L'OHM.

PROPOSITIONS FAITES A LA COMMISSION INTERNATIONALE POUR LA FIXATION DES UNITÉS ÉLECTRIQUES.*

* NOTE 1.

D'ALMEIDA: JOURNAL DE PHYSIQUE. DEUXIÈME SÉRIE, T. I, 1882, P. 477—483.

En définissant la résistance comme le rapport de la force électrique à l'intensité du courant, on suppose que la résistance est indépendante de la variation, par rapport au temps, de ces deux variables.

En général, cette supposition est erronée. Imaginons-nous, par exemple, une pile thermoélectique traversée par un courant variable. Sous l'influence du courant, les soudures de la pile seront réchauffées et refroidies, de manière que, si le courant est constant, il se produira une force électromotrice agissant comme résistance et d'après les mêmes lois qu'elle; tandis que, le courant étant variable, la résistance diminuera quand le courant augmentera, et deviendra plus fort quand le courant décroîtra. Au moment même où le courant cessera, il restera une force électromotrice, et la résistance, c'est-à-dire le rapport de cette force à l'intensité du courant, laquelle est nulle, sera en ce moment égale à l'infini.

Quand à la résistance des corps homogènes, on ne sait quel rôle y jouent les forces thermoélectriques. L'homogénéité elle-même est une abstraction qui n'existe

pas en réalité, et il serait difficile d'expliquer la relation intime entre la conductibilité de la chaleur et celle de l'électricité, sans avoir recours à des forces intérieures thermo-électriques.

Une théorie générale de la conductibilité électrique, fondée sur des expériences précises, pourrait sensiblement modifier les idées jusqu'ici admises sur ce sujet.

Il faut donc, à mon avis, que la définition de la résistance et que les expériences qui auront pour unique but de la mesurer soient restreintes à des courants constants. Cela posé, il ne nous reste qu'une seule question théorique à examiner au moyen des expériences: la résistance est-elle, comme on l'a admis jusqu'ici, complètement indépendante de l'intensité ou de la densité du courant?

En se bornant à des courants constants, on n'a guère de choix quant aux méthodes à employer. En tous cas, il faut mesurer la différence de potentiel aux extrémités de la résistance dont on cherche la valeur, celle-ci étant parcourue par un courant constant. Cette détermination pourrait être faite au moyen d'un électromètre, mais seulement dans le cas où l'on accepte l'unité électrostatique; tandis que, si l'on veut déterminer immédiatement la résistance en valeur électromagnétique, il sera nécessaire d'employer une force électromotrice d'induction, en la comparant avec la différence de potentiel cherchée.

Pour comparer ces deux forces, on pourrait également se servir d'un électromètre; mais il serait plus simple d'égaliser les deux forces. En les opposant l'une à l'autre dans un même circuit, l'égalité sera indiquée

par un galvanomètre qui, placé dans le circuit, ne devra pas dévier.

La force électromagnétique d'induction peut être ou variable ou constante. Dans le premier cas le circuit ne doit être fermé que pendant un temps très court: par exemple, au moment où la force d'induction atteint une valeur maximum. Cette méthode, qui a été proposée par MM. Carey Foster et Maxwell, et récemment par M. Lippmann, a l'avantage d'être applicable à de grandes résistances; mais l'état variable de la force électromotrice étant nécessairement accompagné de petits mouvements d'électricité, je ne puis recommander cette méthode pour des expériences qui ne doivent laisser aucune doute à l'égard de la théorie.

Quand il s'agit de produire une force électromotrice constante d'induction, on sera réduit en pratique à l'emploi de mouvements rotatoires d'une vitesse constante dans un champ magnétique invariable. Ces mouvements doivent seulement produire des forces électromotrices, sans donner naissance à des courants dans l'intérieur du corps tournant tant que l'électricité développée n'est pas dérivée à l'extérieur. Cette condition est nécessaire, parce que l'on ne pourra calculer exactement les effets de ces courants intérieurs, d'autant plus que ceux-ci, étant fixes dans l'espace, seront toujours variables par rapport aux moléeules du corps tournant.

Pour satisfaire à cette condition, il sera nécessaire et suffisant que les forces magnétisantes, qui agissent en un point quelqonque du corps tournant, aient la même valeur et la même direction par rapport au corps dans toute l'étendue du cercle que décrit le point, quand on fait tourner le corps. Cette condition remplie, la forme

et le magnétisme propre du corps tournant pourront être quelconques.

Or il faut employer, ou un champ magnétique constant comme celui du magnétisme terrestre agissant parallèlement à l'axe de rotation, ou un champ magnétique distribué d'une manière régulière autour de l'axe de rotation, comme celui qu'engendre un courant qui, perpendiculaire à l'axe, parcourt une surface de révolution, dont l'axe coïncide avec l'axe de rotation.

De là deux méthodes distinctes, dont l'une a été proposée par M. Lippmann. „Un disque de cuivre est mobile autour de son axe, qui est parallèle à l'aiguille de déclination. Sous l'influence du magnétisme terrestre, il s'y produit une force électromotrice d'induction dirigée radialement, et que l'on recueille au moyen de frotteurs placés, l'un au centre et l'autre sur la circonférence.“ *

La force électromotrice produite étant ordinairement trés petite, il faut employer un disque de grande dimension et à une grande vitesse de rotation. Eu même temps, le frotteur appliqué à la circonférence produira une force thermoélectrique qui pourrait même surpasser la force électromotrice d'induction. Il y aura donc, dans ces expériences, de sérieuses causes d'erreurs que l'on ne pourra éliminer que bien difficilement.

Je propose de modifier cette méthode, en employant deux disques, on plutôt deux grandes roues mobiles autour d'axes parallèles entre eux, et mises en contact à leurs circonférences. Quand on fait tourner les deux roues en sens contraire et avec la même vitesse, leurs axes étant parallèles à l'aiguille de déclinaison, la force

---

* Voir Journal de Physique, 2e série, 1882, t. I, p. 313.

électromotrice d'induction est dirigée, dans l'une, du centre à la circonférence, dans l'autre, de la circonférence au centre, de sorte que la force peut être recueillie au moyen de deux pointes placés aux deux centres. De cette manière, on évite complètement les effets thermo-électriques des frotteurs.

En employant cette méthode, il faudra mesurer et la vitesse de rotation et l'intensité du courant qui a traversé l'étalon. Cependant, on peut se dispenser de mesurer l'intensité du magnétisme terrestre en valeur absolue; seulement, pour les corrections, il faut comparer l'intensité du champ magnétique aux deux endroits où sont placés les roues et le galvanomètre.

L'autre méthode, dont je viens de parler, a été imaginée et employée par moi-même, il y a déjà dix ans. Un disque de laiton, mobile autour d'un axe perpendiculaire à l'aiguille de déclinaison, a été placé à l'intérieur d'une bobine concentrique traversée par le même courant que la résistence dont on cherche la valeur. Deux frotteurs de laiton sont appliqués, l'un au centre, l'autre à la circonférence du disque. Le champ magnétique étant engendré par le même courant qui parcourt l'étalon, on trouve la résistance, en multipliant par une constante C le nombre de tours que fait le disque par seconde. De cette manière, les expériences sont réduites à la plus grande simplicité.

C'est surtout de l'évaluation de la constante C que dépend l'exactitude des résultats. Supposons que le disque soit placé à l'intérieur d'un solénoïde infini et qu'il soit mobile autour de l'axe du solénoïde, on aura

$$C = \frac{4\pi S}{d},*$$

* NOTE 2.

S étant la surface du disque, d la distance des filets du solénoïde. Cette valeur, qui est d'une simplicité remarquable, n'est pas beaucoup altérée pour un solénoïde d'une longueur finie, mais qui excède plusieurs fois son rayon.

Or je propose d'employer, au lieu d'une bobine, un cylindre de laiton, muni d'un pas de vis, dans lequel on a enroulé en une seule couche un fil de cuivre bien isolé. En faisant par exemple la longueur du cylindre de 1^m et son diamètre de $0^m,333$, la valeur de C indiquée plus haut est diminuée seulement de 5 à 6 pour cent. La valeur de cette constante sera suffisamment grande, si l'on prend la distance de deux filets de la vis égale à $1^{mm},5$, et le diamètre du disque égal à $0^m,3$. Par exemple pour déterminer la résistance d'une colonne de mercure de $0^m,50$ de longueur et de $0^m,04$ de largeur, le disque ne doit faire que sept tours par seconde. En supposant l'intensité du courant égale à 1 ampère, le champ magnétique au milieu du cylindre atteindra une intensité quarante fois plus grande que celle du magnétisme terrestre. Les forces thermoelectriques qui se développeront par l'echauffement des frotteurs seront petites par rapport aux forces électromotrices d'induction, et pourront être observées facilement, en interrompant le courant ou en changeant le sens du courant. On peut éliminer ces forces, en introduisant dans le circuit des forces électromotrices égales et opposées, provenant ou de la dérivation d'un courant quelconque, ou d'éléments thermoélectriques.

Sans entrer dans les détails des expériences, j'ajouterai seulement que, pour éviter des courants intérieurs, l'axe tournant doit être isolé de ses supports et de l'en-

grenage, et, pour amoindrir les forces thermoélectriques, le disque doit être ou de laiton avec des frotteurs du même métal, ou de cuivre avec de frotteurs de cuivre ou de laiton.

Le disque doit être examiné quant à son magnétisme qui aggrandirait les forces électromotrices d'induction, tandis que le magnétisme du cylindre comme celui de l'axe, pourvu que celui-ci traverse toute la longueur du cylindre, n'auront pas d'effets sensibles.

Pour me résumer, je propose de mesurer la résistance d'une colonne de mercure, en employant exclusivement des courants constants, et d'accepter, pour les expériences, deux méthodes distinctes savoir: la méthode de M. Lippmann et la mienne, toutes les deux modifiées de la manière que je viens d'indiquer.

Addition. — Soient X, Y, Z les composantes de l'intensité d'un champ magnétique.

Les composantes des forces qui agissent, dans ce même champ, sur un élément d'un courant dont l'intensité est égale à l'unité, sont

$$Zdy - Ydz, \quad Xdz - Zdx, \quad Ydx - Xdy,$$

dx, dy, dz étant les projections de ds sur les trois axes. En faisant tourner le corps auquel appartient l'élément ds autour de l'axe des x, le moment des forces agissant en ds à l'encontre de ce mouvement sera

$$(Xdz - Zdx)z - (Ydx - Xdy)y,$$

laquelle expression représentera en même temps la force électromotrice d'induction développée dans l'élément ds, quand la vitesse de rotation est égale à l'unité.

En intégrant cette expression sur toute l'étendue

d'une courbe fermée quelconque, on aura la somme des forces électromotrices dans ce circuit. En général, il se développera des courants à l'intérieur du corps, et, dans le seul cas où l'expression ci-dessus indiquée de la force électromotrice dE sera une différentielle exacte, il ne se produira aucun courant, tant que l'on ne dérive pas à l'extérieur l'électricité développée dans le corps.

Or, pour que l'expression

$$-(yY+zZ)\,dx+yX\,dy+zX\,dz = dE$$

soit une différentielle exacte on doit avoir

$$\frac{\partial(yX)}{\partial z}=\frac{\partial(zX)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(yY+zZ)+y\frac{\partial X}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(yY+zZ)+z\frac{\partial X}{\partial x}=0,$$

d'où l'on trouve, en mettant $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$,

$$\frac{\partial X}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial(yY+zZ)}{\partial\theta}=0.$$

En introduisant le potentiel F de l'intensité du champ magnétique, on aura

$$X=\frac{\partial F}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial F}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0,$$

ou bien, en coordonnées semi-polaires,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}=0.$$

Il s'ensuit que l'on aura

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial(Yy + Zz)}{r\partial r} + \frac{\partial(-Yz + Zy)}{r^2\partial\theta} = 0.$$

Le terme $-Yz + Zy$ doit donc être de la forme

$$A + B\theta + C\theta^2,$$

où les coefficients A, B, C sont indépendants de θ; mais d'un autre côté, les forces étant des fonctions périodiques de θ, on aura $B = 0$, $C = 0$.* * NOTE 3.

Les trois composantes

$$X, \quad Y\frac{y}{r} + Z\frac{z}{r}, \quad -Y\frac{z}{r} + Z\frac{y}{r}$$

de l'intensité du champ magnétique doivent donc être indépendantes de l'angle θ, quand on impose cette condition qu'aucun courant ne puisse prendre naissance dans l'intérieur du corps tournant.

NOTES.

NOTE 1. Un résumé se trouve dans les „Beiblätter zu Wiedemanns Annalen“ 1883, p. 48.

NOTE 2. Comparer note 12 au mémoire suivant. On suppose ici que les rayons du disque et du cylindre sont égaux.

NOTE 3. Le terme $-Yz+Zy$ doit être de la forme $A+B\theta$, où A et B sont indépendants de θ; on aura donc $B = 0$.

DÉTERMINATION

DE LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE DU MERCURE

EN MESURES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ABSOLUES.

DÉTERMINATION DE LA RESISTANCE ÉLECTRIQUE DU MERCURE EN MESURES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ABSOLUES.

VIDENSK. SELSK. SKRIFTER. VII (6), P. 310—333. 1885.* * NOTE 1.
WIED ANN. T. XXV. P. 1—31.

A la demande du congrès international, tenu en octobre 1882, pour la détermination des unités électriques de mesure, le gouvernement danois m'a concédé une somme de 5000 Kr. (7000 frcs.) pour l'exécution des présentes expériences. J'ai eu ainsi à ma disposition des ressources qui dépassaient de beaucoup celles avec lesquelles j'avais fait mes recherches antérieures sur le même sujet.* Par la bienveillance de l'école militaire, le local de son laboratoire chimique a été mis à ma disposition, et le directeur du laboratoire, M. le Dr. H. Topsøe m'a fourni de différentes manières son assistance, qui m'a été du plus grand secours, en premier lieu par l'exécution d'une grande partie des mesures.

Pour la détermination des unités fondamentales absolues, le temps, la longueur et la masse, on s'est procuré les appareils suivants.

1°. Un chronomètre à pendule, dont la marche a été déterminée par comparaison avec le signal quotidien à l'observatoire astronomique.

---

* Overs. over det K. D. Vidensk. Selsk. Forh. 1873, p. 1 (voir p. 86).

2°. Un mètre normal et un cathétomètre, tous deux fabriqués par la société génevoise. Pour le premier était indiquée la correction $0^{mm},0237$, juste à $-1°,25$ C.; elle était déterminée par comparaison avec un mètre normal vérifié au bureau international de Paris.

3°. De poids normaux de Westphal en Celle.

I. *Méthodes pour les mesures de résistance.*

Mesures absolues. La méthode appliquée est en principe la même dont je me suis servi dans mes récherches antérieures. J'ai au contraire introduit des modifications essentielles dans l'exécution; en premier lieu, en ce qui concerne l'appareil de rotation, que j'ai modifié conformement au projet présenté par moi à la conférence internationale.* Ces changements sont mentionnés en détail dans ce qui suit.

Mesures relatives. Dans toutes mes mesures relatives, je me suis servi d'une méthode particulière, qui a été reconnue aussi facile à employer que susceptible d'un haut degré d'exactitude; c'est pourquoi je peux la recommander de préférence aux méthodes ordinaires.

Les deux résistances *AB* et *CD* qui doivent être comparées sont liées par un fil conducteur et introduites, en combinaison avec deux bobines, dans un circuit électrique. Ces deux bobines sont disposées à distance
NOTE 2. convenable en avant et en arrière d'un galvanomètre* à miroir. Le courant est dérivé en deux, des quatres points *A*, *B*, *C*, *D* au galvanomètre de manière que l'action du courant dérivé sur les aiguilles du galvanomètre soit opposée à celle du courant principal.

---

* Journal de phys., s. II, t. 1, p. 477, 1882 (voir p. 119).

On a de plus introduit un rhéostat dans le conducteur, qui mène au galvanomètre, afin de faire varier la résistance jusqu'à ce qu'on ramène le miroir du galvanomètre au zéro de la graduation.

La résistance totale du galvanomètre et des fils, par lesquels l'électricité lui est amenée, est désignée par G, les résistances du rhéostat par R, R_1, R_2 selon qu'on a dérivé les points, AC, BD ou AD. On aura alors

$$k \cdot AC = G + R,$$
$$k \cdot BD = G + R_1,$$
$$k \cdot AD = G + R_2,$$

$k + 1$ correspondant au rapport constant du courant principal au courant dérivé. On en déduit

$$\frac{CD}{AB} = \frac{R_2 - R}{R_2 - R_1}.$$

Les expériences peuvent être modifiées par la dérivation faite en deux autres points comme AB ou CD, par où l'on obtiendra un contrôle du résultat trouvé.

Pour pouvoir en même temps faire varier la constante k d'une manière déterminée, le fil des bobines était composé comme un câble de 11 fils isolés l'un de l'autre. Le câble était faiblement tordu; comme aussi les bouts de chaque bobine, longues de plus d'un mètre, étaient entrelacés et conduits de côté à un commutateur, où les 22 bouts des fils, qui étaient situés tout près l'un de l'autre, pouvaient être réunis d'une manière quelconque.

On pouvait de cette manière, en conservant invariable la position des bobines, augmenter leur action sur le galvanomètre 2, 3 et jusqu'à 11 fois. Il va sans dire

qu'il fallait, en faisant varier ces combinaisons, veiller à ce que le conducteur total du courant principal en dehors des bobines n'exerçât aucune action immédiate sur le galvanomètre, ce qu'on a obtenu en retirant les bobines du circuit et en compensant le reste du conducteur au moyen d'un nœud du conducteur qui était placé tout près de l'observateur.

Le galvanomètre était un appareil de Thomson à miroir plan et se lisait à l'aide d'une lunette. Il y avait deux bobines; l'inférieure, qui contenait un assemblage de petites aiguilles aimantées, avait un fil épais; et la supérieure, dont on s'est servi exclusivement dans ces expériences, était composée d'un fil double, mince et très long, qui entourait l'aimant auquel était fixé le miroir.

Toutes les expériences ont été faites dans un local non chauffé. La variation du zéro du galvanomètre pendant la durée d'une suite d'expériences a été compensée par un aimant placé dans le voisinage de l'observateur. Le rhéostat était un rhéostat de Siemens et allait de une jusqu'à 10000 unités; il fut parfois combiné avec un autre qui allait de $\frac{1}{10}$ d'unité à une unité.

Par calibrage on a trouvé que le premier rhéostat était tellement exact, qu'il n'était pas nécessaire de construire un tableau de corrections. Je peux ajouter que le rhéostat était à ce moment tout neuf et qu'il apparut six mois plus tard de variations sensibles qui rendirent nécessaire un ajustage nouveau.

II. *Calibrages des tubes de verre.*

Tous les calibrages ont été exécutés par M. le Dr. Topsøe. A une petite distance du cathétomètre, qui était

placé sur des fondations de béton, était placée verticalement une planche d'acajou fixée sur une table qui pareillement reposait sur des fondations de béton. Dans cette planche étaient encastrés le mètre normal et, à côté de lui, le tube à calibrer.

Le calibrage des tubes étroits fut exécuté de cette manière: une petite colonne de mercure était déplacée par le tube de telle façon que la surface inférieure de la colonne touchât chaque fois la surface supérieure de la colonne dans sa position précédente. C'est ce qu'on a pu réaliser aisément et avec une grande exactitude de la manière suivante. Un tube de verre, de la forme que fait voir la figure, était placé horizontalement dans une

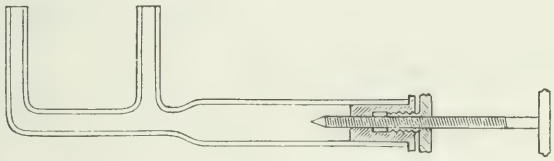


Fig. 1.

rainure de la planche que nous avons mentionnée plus haut. Au bout recourbé du tube fut fixé verticalement le tube qui devait être calibré. L'autre branche verticale du tube, qui servait à verser de mercure dans l'appareil, fut fermée par un bouchon de verre. L'appareil était fermé par un bouchon muni d'un écrou, par lequel passait une vis longue et fine. Le tout était fait en acier. Au moyen de ladite vis on pouvait faire monter le mercure à une hauteur arbitraire dans le tube qui fut calibré.

Le tube était doublement recourbé vers le haut et étiré en pointe. Après avoir fait monter le mercure jusqu'à la pointe, il fut de nouveau retiré, de manière que la

colonne fût suivie d'une petite bulle d'air et puis d'une colonne de mercure longue de deux millimètres environ. C'est au moyen de cette dernière colonne que le calibrage a été exécuté.

Le calibrage accompli, on a fait sortir du tube la petite colonne qui fut recueillie dans une coupe et pesée. Puis, séparée par une bulle d'air, une colonne plus longue, dont la longueur correspondait à peu près à toute la longueur calibrée du tube, fut refoulée dans le tube. Après avoir mesuré la longueur de cette colonne et sa position par rapport à une marque qui se trouvait sur le tube, on a fait sortir cette colonne et elle a été pesée. Enfin on a ôté le tube, dont on a détaché les bouts dans le voisinage des limites de la partie calibrée et dont les deux extrémités ont été rodées en forme de cône. Puis la longueur du tube a été mesurée.

Soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3 \ldots \lambda_n$$

les longueurs de la petite colonne de mercure dans ses positions différentes et posons

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots \lambda_n = L.$$

De plus désignons par L' la longueur de la (grande) colonne de mercure introduite ensuite, et par λ'_1 et λ'_n les parties restantes de la longueur calibrée; alors on aura

$$L - \lambda'_1 - \lambda'_n = L'.$$

Pareillement, soient L'' la longueur du tube détaché, λ''_1 et λ''_n les parties restantes de la longueur calibrée et par suite

$$L - \lambda''_1 - \lambda''_n = L''.$$

La résistance R' de la colonne de mercure L'' peut alors être exprimée par

$$R' = r\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_1''}{s_1} + \frac{\lambda_2}{s_2} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{s_{n-1}} + \frac{\lambda_n - \lambda_n''}{s_n}\right),$$

où r désigne la résistance spécifique du mercure et s_1, s_2 ... s_n les sections moyennes correspondantes à λ_1, λ_2 ... λ_n.

Soient w et W les poids réduits au vide de la petite colonne calibrante et de la colonne L'. Les volumes de ces colonnes sont désignés par $v - 2x$ et $V - 2x$, x étant le petit volume limité par la surface convexe de l'extrémité de la colonne, du plan tangent à son centre et par la surface cylindrique intérieure du tube. Par suite, si l'on désigne par ρ le poids d'une unité de volume de mercure à 0° C., ce que nous supposons provisoirement être la température pendant la durée de l'expérience, on aura

$$w = \rho(v - 2x)^*, \quad W = \rho(V - 2x),$$ * NOTE 3.

et par conséquent

$$W - w = \rho(V - v).$$

De plus nous avons

$$V = \left(n - \frac{\lambda_1'}{\lambda_1} - \frac{\lambda_n'}{\lambda_n}\right) v,$$

$$v = s_1\lambda_1 = s_2\lambda_2 = \ldots.$$

Si l'on pose

$$\lambda_1 - \frac{L}{n} = \delta_1, \ \lambda_2 - \frac{L}{n} = \delta_2, \ \ldots, \ \lambda_n - \frac{L}{n} = \delta_n,$$

les quantités δ_1, δ_2 ... δ_n étant très petites, et si l'on

introduit la notation

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 \ldots \delta_n^2 = \Sigma\delta^2.$$

on obtiendra

$$R'(W-w) = r\rho\left(n-1-\frac{\lambda'_1}{\lambda_1}-\frac{\lambda'_n}{\lambda_n}\right)\left(\frac{LL''}{n}-\lambda''_1\delta_1-\lambda''_n\delta_n+\Sigma\delta^2\right).*$$

* NOTE 4.

Supposons que les mesures des longueurs L et L'' aient été faites aux températures t' et t'', et que la température à laquelle l'étalon normal est juste soit $t_0(-1^\circ,25)$; de plus soient b et g les coefficients de dilatation linéaire du laiton et du verre et γ le coefficient de dilatation cubique du mercure. La résistance de la colonne de mercure réduite à zéro est alors déterminée par

* NOTE 5.

$$R = R'\,\frac{1+b(t'+t''-2t_0)+g(2t'-t'')}{1+\gamma t'}.*$$

Les valeurs des constantes, dont on s'est servi ici, sont

$$\rho = 13{,}5952, \quad \gamma = 0{,}0001795, \quad b = 0{,}000018, \quad g = 0{,}0000084.$$

En ce qui concerne la constante r employée ci-dessus, on peut remarquer qu'on obtiendra R exprimé en unités de mercure ordinaires, si les longueurs sont évaluées en millimètres, les poids en milligrammes et si l'on pose $r = \frac{1}{1000}$.

Les résultats des mesures étaient:

Tube n° 1.

$$L = 368{,}119, \quad \lambda_1 = 19{,}406, \quad \lambda_n = 19^{mm},315,$$
$$L' = 357{,}042, \quad \lambda'_1 = 4{,}685, \quad \lambda'_n = 6^{mm},382,$$
$$L'' = 364{,}61, \quad \lambda''_1 = -0{,}87, \quad \lambda''_n = 4^{mm},38.$$
$$n = 19, \quad t' = 10^\circ,0, \quad t'' = 11^\circ,0.$$
$$W = 1395^{mgr},75, \quad w = 75^{mgr.},40, \quad \Sigma\delta^2 = 0{,}4714.$$
$$R = 1{,}26612 \text{ unités de mercure.}$$

Tube n° 2.

$L = 445{,}36$, $\lambda_1 = 19{,}965$, $\lambda_n = 20^{mm}{,}434$,* * NOTE 6.

$L' = 442{,}32$, $\lambda'_1 = 3{,}06$, $\lambda'_n = -0^{mm}{,}01$,

$L'' = 435{,}30$, $\lambda''_1 = -1{,}58$, $\lambda''_n = 11^{mm}{,}66$.

$n = 22$, $t' = 9°{,}6$, $t'' = 9°{,}0$.

$W = 351^{mgr.}{,}72$, $w = 16^{mgr.}{,}05$, $\Sigma\delta^2 = 1{,}1714$.

$R = 7{,}42980$ unités de mercure.

Le calibrage des tubes larges qui devaient servir aux mesures absolues de résistance, savoir trois tubes longs d'un mètre et larges d'un, deux, trois centimètres, fut exécuté de la manière suivante. Les tubes étaient fermés à un bout par un couvercle de fer muni d'un robinet, et à l'autre bout entourés d'une boîte de fer. Si l'on voulait remplir un tube avec du mercure, après l'avoir placé horizontalement, on le mettait en communication avec une machine pneumatique au moyen d'un tube de verre muni d'un robinet de verre, et l'on faisait le vide autant que possible, puis on introduisait le mercure au moyen du robinet de fer. Puis le tube de mercure était placé en position verticale, et l'on attachait à son extrémité supérieure l'appareil d'acier représenté par la fig. 2.

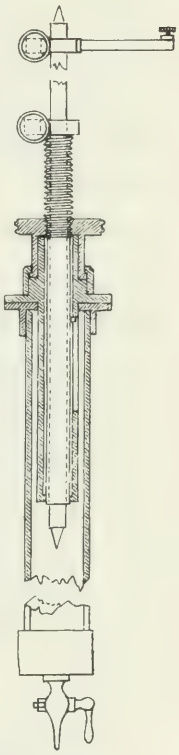


Fig. 2.

Il était composé d'une enveloppe extérieure immobile portant une fente, et d'une enveloppe intérieure, munie en bas d'un tenon dirigé par la fente et en haut taillée en forme d'une vis fine qui passait par un écrou et enfin à l'intérieur d'une barre d'acier pointue aux deux extrémités qui pouvait à volonté être déplacée et

fixée. Le tout était soigneusement arrondi. La pointe inférieure fut abaissée jusqu'à ce qu'elle touchât à la surface du mercure, ce qui fut observé avec la lunette, puis on visa, avec la lunette du cathétomètre, sa pointe supérieure, dont on mesura la hauteur. Ensuite le mercure fut peu à peu vidé par portions convenables, presque égales entre elles, et l'on continua de cette manière les mesures sur toute la longueur du tube qui devait être calibré.

Le plus large des trois tubes était percé de quatre, les autres de deux trous fins et coniques. Chaque trou avait une fermeture imperméable à l'air, consistant en une petite plaque de platine retenue par un ressort de montre qui entourait presque le tube. Les bouts recourbés de celui-ci étaient liés par un fil de cuivre, qui servait pendant les expériences suivantes comme conducteur électrique. Quand le mercure, au cours du calibrage, arrivait juste au-dessous d'un de ces trous, le ressort était détaché et déplacé; la pointe inférieure était placée au point milieu du trou, qu'on pouvait encore observer assez commodément avec la lunette; et puis on observait la hauteur de la pointe supérieure. De plus on a mesuré séparément la distance des trous qui tous étaient placés sur une même ligne verticale.

Comme on ne pouvait pas éviter, pendant la durée des expériences, de petites variations de la température, les mesures ont été par de petites corrections rapportées à une température commune moyenne.

Soient L la longueur calibrée à la température moyenne t, W le poids correspondant du mercure versé, L' la distance de deux trous mesurée à la température t'. La résistance R' de la colonne de mercure comprise

entre les deux trous peut sans correction de température être déterminée par

$$R'W = r\rho LL'\mu,$$

μ étant un nombre qui ne diffère que peu de l'unité et qui représente la correction provenant de la forme imparfaitement cylindrique du tube; cette correction, calculée par des mesures particulières, est très petite, comme on le verra par la suite; et c'est pourquoi il n'est pas nécessaire de rapporter ici en détail les mesures qui forment la base de ce calcul. De la valeur de R' trouvée de cette manière on peut ensuite déduire la résistance R correspondant à 0° de la même manière que ci-dessus, sauf qu'on remplace ici t' et t'' par t et t'.

Les résultats des mesures étaient:

Tube n° 1.

$L = 525^{mm},93$, $t = 12°,49$, $W = 2312197^{mgr.}$,

$L' = 499^{mm},35$, $t' = 10°,6$, $\mu = 1,000071$

d'où

$R = 0,00154180$ unités de mercure.* * NOTE 7.

Tube n° 2.

Ce tube était percé de quatre trous A, B, C, D. La résistance à 0° des colonnes limitées par ces trous sont désignées par AB, BC, CD.

AB.

$L = 200^{mm},45$, $t = 11°,70$, $W = 2103229^{mgr.}$,

$L' = 199^{mm},79$, $t' = 9°,0$, $\mu = 1,000006$.

BC.

$L = 203^{mm},19$, $t = 10°,79$, $W = 2124558^{mgr.}$,

$L' = 199^{mm},97$, $t' = 9°,0$, $\mu = 1,000021$.

CD.

$L = 201^{mm},09$, $t = 11°,22$, $W = 2082375^{mgr}$,

$L' = 200^{mm},45$, $t' = 9°,0$, $\mu = 1,000010$

d'où

* NOTE 8. $AB = 0{,}00025836$ unités de mercure,*

$BC = 0{,}00025964$ —

$CD = 0{,}00026279$ —

Comme on a reconnu plus tard, par les mesures des résistances absolues, qu'on obtenait les résultats les plus exacts avec les colonnes de mercure qui avaient la plus petite résistance, on n'a fait aucune détermination de la résistance absolue au moyen du troisième tube, dont la résistance était 0,0062215 unités de mercure.

III. *Coefficient de température de la résistance de conduction du mercure.*

Le mercure employé à toutes les expériences était préparé par M. le Dr. Topsøe de deux manières différentes. Une partie était soigneusement purifiée de la manière ordinaire, sans être pourtant distillée, l'autre partie était produite en quantité considérable par la distillation d'un oxyde de mercure, préparé lui même avec du mercure purifié. Ces deux modes de préparation n'ont donné lieu, dans des expériences réitérées, à aucune différence appréciable dans la conductibilité électrique.

Dans les expériences en question on s'est servi de deux tubes non calibrés dont les bouts ouverts étaient élargis en forme de réservoirs cylindriques. Le premier tube, long d'un mètre environ, large de 1^{mm} était tordu en spirale l'autre long de 260^{mm}, large de $0^{mm},1$ était récourbé en forme d'**U**.

Après avoir été remplis avec du mercure, les tubes furent placés sous le récipient d'une machine pneuma-

tique, et la résistance fut observée pendant qu'on faisait le vide. Si le mercure contenait de petites bulles d'air, celles-ci grossiraient par la raréfaction de l'air du récipient, et la résistance augmenterait. En même temps il faudrait qu'une petite augmentation de la résistance se produisît seulement par la diminution de la pression sur le mercure; mais au contraire j'ai trouvé une petite diminution constante de la résistance, qui pour le tube en **U** monta à 0,076 pour cent. Dans d'autres expériences qui seront mentionnées plus tard, dans lesquelles on s'est servi de tubes droits placés horizontalement et dont les extrémités étaient couvertes de mercure, on n'a pas observé d'anomalie pareille. C'est pourquoi je suppose qu'elle tient à l'épuisement de l'air contenu entre le verre et le mercure dans les parties supérieures des tubes. En tout cas les expériences ont fait ressortir qu'aucune bulle d'air appréciable ne pouvait se trouver dans les tubes.

Puis on a placé l'un des tubes dans un réservoir rempli d'alcool, qui était entouré d'un réservoir plein d'eau, par lequel la température du premier réservoir a été rendue constante. Le premier réservoir contenait de plus un thermomètre normal divisé en dixièmes de degré et un agitateur.

Les mesures de la résistance ont été faites de la manière indiquée ci-dessus. On désigne par AB la résistance d'une colonne de mercure à la température t contenue dans un des tubes, par BC la résistance d'un fil de platine qui relie le tube à un rhéostat, dont la résistance CD était dans la première série d'expériences une unité de Siemens, dans la seconde 30.

Tube en forme de spirale:

$$t = 13^\circ,28 \quad k \cdot AB = G + 2464,2$$
$$k \cdot AD = G + 6671,5$$
$$k \cdot BD = G + 743,1$$

d'où

$$G = 3464,2, \quad k \cdot BD = 4207,3$$
$$k \cdot AB = 5928,4 \text{ (calc.: } 5928,3).$$

$$t = 10^\circ,00 \quad k \cdot AB = G + 2445,9$$
$$k \cdot AD = G + 6654,0$$
$$k \cdot BD = G + 743,0$$

d'où

$$G = 3465,1, \quad k \cdot BD = 4208,1$$
$$k \cdot AB = 5911,0 \text{ (calc.: } 5911,0).$$

$$t = 0^\circ \quad k \cdot AB = G + 2392,6$$
$$k \cdot AD = G + 6600,0$$
$$k \cdot BD = G + 741,8$$

d'où

$$G = 3465,6, \quad k \cdot BD = 4207,4$$
$$k \cdot AB = 5858,2 \text{ (calc.: } 5858,2).$$

$$t = 27^\circ,32 \quad k \cdot AB = G + 2537,8$$
$$k \cdot AD = G + 6746,0$$
$$k \cdot BD = G + 743,5$$

d'où

$$G = 3464,7, \quad k \cdot BD = 4208,2$$
$$k \cdot AB = 6002,5 \text{ (calc.: } 6002,5).$$

Les valeurs calculées sont déduites de la formule

$$k \cdot AB = 5858,2\,(1 + 0,0009013\,t),$$

et sont, comme on voit, presque complètement en concordance avec les valeurs observées.

Tube en **U**:

Le fil double du galvanomètre était ici réuni en un.

$t = 8°,32$ $\quad k \cdot AD = G + 8773,1,$

$k \cdot BD = G + 3961,2$

d'où

$k \cdot AB = 4811,9$ (calc.: 4811,9).

$t = 33°,43$ $\quad k \cdot AD = G + 8882,8,$

$k \cdot BD = G + 3961,2$

d'où

$k \cdot AB = 4921,6$ (calc.: 4921,8).

$t = 35°,31$ $\quad k \cdot AD = G + 8891,3,$

$k \cdot BD = G + 3961,0$

d'où

$k \cdot AB = 4930,3$ (calc.: 4930,1).

Les calculs sont exécutés d'après la formule

$$k \cdot AB = 4775,6(1 + 0,000916\,t).$$

Les coefficients trouvés ici pour l'augmentation apparente de la résistance du mercure dans les tubes de verre pour un échauffement d'un degré sont donc

0,0009013 entre 0° et 27°,32,
0,000916 entre 8°,32 et 35°,31.

Les coefficients sont un peu plus grands que ceux qui ont été trouvés par Lenz et concordent presque avec les coefficients trouvés par Siemens et récemment par Mascart.

IV. *Influence de la capillarité sur la conductibilité du mercure.*

Dans une séance de la conférence électrique internationale de 1882, Becquerel a appelé l'attention sur

ladite source d'erreur*; à ce sujet Helmholz a fait remarquer que Siemens a toujours trouvé la plus grande concordance entre la résistance observée du mercure et celle qu'on avait calculée pour des colonnes dont les diamètres variaient de 1^{mm} à 2^{mm}, et Boscha a fait savoir que Rink (de Delft) avait comparé des tubes différents et trouvé des résultats concordants à $\frac{1}{7000}$ près. Comme il fallait que mes déterminations absolues fussent exécutées avec des colonnes d'un diamètre compris entre 2^{cm} et 3^{cm}, tandis que la résistance normale devait être rapportée à une colonne dont la section transverse était d'un millimètre carré, j'ai cru nécessaire de rechercher, par des expériences précises, si les modifications moléculaires de la surface du mercure le long des parois du tube de verre pouvaient produire quelque changement appréciable dans la conductibilité du mercure.

Les premières expériences ont été faites au moyen d'une auge formée d'épaisses plaques de verre à glace. Sur une base de verre à glace étaient fixées avec de la colle de poisson deux pièces de verre à glace hautes de 1^{cm}, à une distance de 2^{cm} l'une de l'autre. Deux plaques d'acier formaient les extrémités de l'auge. Elle fut remplie de mercure et l'on avait placé une plaque de verre à glace tout près et au dessus de la surface du mercure. Dans cette plaque étaient percés quatre trous, deux plus grands et deux plus petits; dans ces derniers étaient placées deux aiguilles à coudre perpendiculaires à la plaque. Elles étaient en communication avec le galvanomètre et on faisait passer un fort courant par les extrémités de l'auge et par les bobines placées dans le

---

* Procès-verbaux p. 68. 1882.

voisinage du galvanomètre. La résistance de la colonne de mercure comprise entre les deux pointes des aiguilles fut déterminée comme dans les expériences précédentes; puis on observa si la résistance variait, quand on abaissait le couvercle jusqu'à la surface du mercure.

On a en effet toujours constaté une petite différence de résistance, en opérant ainsi; mais elle était tantôt positive, tantôt négative, et il ressortit des expériences que cette différence était produite par la pression exercée sur la surface du mercure.

Or cette pression pouvait être tantôt positive, tantôt négative, selon que l'auge était plus ou moins complètement remplie de mercure.

La première circonstance pouvait être reconnue à ce fait, que la surface du mercure était convexe dans les deux grands trous du couvercle, tandis que cette surface était concave dans le cas contraire. Mais par l'effet de ces pressions, les parois de l'auge étaient un peu courbées: sous une pression intérieure plus grande la section transversale était agrandie, la résistance diminuée et inversement. Il résulta des mesures, que la différence produite par le contact seul du couvercle et du mercure ne pouvait pas excéder $\frac{1}{10000}$ de la résistance totale, si même cette différence se produisait.

L'action de la capillarité influe sur la formule de la résistance de conduction d'une colonne de mercure, en ce sens qu'on doit ajouter á la section transversale de la colonne un terme proportionnel au périmètre. Il ressort de là que cette action doit en premier lieu devenir appréciable dans les expériences sur des tubes très étroits. C'est pour cette raison que j'ai exécuté les mesures sur de pareils tubes, et tout d'abord sur les

tubes calibrés mentionnés ci-dessus sous les n°s 1 et 2, dont les diamètres étaient $0^{mm},606$ et $0^{mm},273$.

Le tube fut fixé dans un trou percé au milieu d'un bloc carré de bois (l'arète du carré avait 2^{cm}; l'épaisseur du bloc 1^{cm}), qui fut placé dans une auge construite de la manière décrite ci-dessus, mais ayant une hauteur double.

L'auge fut remplie de mercure, comme aussi le tube par lequel les deux parties de l'auge étaient en communication. Le couvercle permettait de lui donner une fermeture imperméable à l'air, et l'on pouvait aspirer l'air pendant qu'on observait la variation de la résistance. De cette manière je me suis gardé d'avance de la présence de petites bulles d'air dans le tube. Puis on a de nouveau ôté le couvercle, et les mesures ont été faites de la même manière que précédemment, le courant principal étant conduit par les extrémités de l'auge et une unité de Siemens, tandis que deux points de ce conducteur étaient en communication avec le galvanomètre. Les expériences ont fait ressortir qu'aucune différence ne se produisait dans la résistance mesurée, quand les deux bouts du conducteur qui communiquait avec le galvanomètre étaient mis en contact avec le mercure des deux côtés du bloc, puis déplacés le long des parois du tube jusqu'à ses deux extrémités. Au contraire une variation appréciable s'est manifestée aussitôt que les points de dérivation étaient amenés plus loin, en dehors des surfaces extrêmes. C'est pourquoi l'on pouvait admettre que la différence potentielle, mesurée lorsque les points de dérivation se trouvaient dans le voisinage du bloc de bois, était identique à celle de deux points placés aux

extrémités du tube sur la circonférence extérieure de sa paroi de verre.

Si l'épaisseur de la paroi de verre peut être considérée comme infiniment grande en comparaison du diamètre intérieur du tube, la résistance mesurée de le manière indiquée correspondra à la résistance de la colonne de mercure du tube prolongée de 0,82 fois le diamètre intérieur. On doit pourtant ajouter une petite correction à ce nombre, qu'a calculé Lord Rayleigh, quand l'épaisseur des parois de tube est finie, correction que j'ai cherché à déterminer aussi bien par le calcul que par l'observation. Je ne rapporterai ici que mes expériences à ce sujet. Elles furent faites au moyen d'un tube long de 300^{mm}, large de $2^{mm},724$ à sa surface intérieure et de $4^{mm},2$ à sa surface extérieure. On a d'abord déterminé la résistance de ce tube. Puis on l'a coupé en deux parties, longues à peu près de 200^{mm} et 100^{mm} et on a mesuré la résistance de chaque partie séparément; enfin la partie la plus longue a été divisée en deux fragments égaux et l'on a de nouveau déterminé la résistance de chaque morceau séparément.

Si l'on désigne par d_i et d_e les diamètres intérieur et extérieur du tube, on trouve par l'expérience la formule empirique

$$0,82 - 0,35 \frac{d_i}{d_e},$$

exprimant le nombre qui, pour des dimensions finies, doit remplacer le nombre de Rayleigh.

J'avais en vue de déterminer de la même manière directe la correction du tube n° 1 ; mais le tube fut brisé accidentellement avant l'exécution des premières mesures. Les deux morceaux furent fixés séparément dans

deux blocs carrés et placés dans l'auge, qui de cette manière fut divisée en trois parties. La distance des deux extrémités des tubes qui étaient tournées l'une vers l'autre était presque de 3^{cm}.

Si l'on désigne par R la résistance totale des deux tubes et de l'espace intermédiaire, par S la résistance de mon unité de Siemens et par x celle du conducteur qui faisait communiquer ces appareils, on aura les résultats suivants des mesures dans lesquelles les deux fils du galvanomètre étaient réunis en un:

$$t = 10^\circ,10 \qquad \begin{aligned} k(R+S+x) &= 9063,3 + G, \\ k(R+x) &= 4766,8 + G, \\ k(S+x) &= 3551,0 + G \end{aligned}$$

d'où

$$R = 1,28297\, S.$$

Par des expériences directes on a trouvé que la résistance de l'espace intermédiaire entre les tubes était égale à $0,00009\, S$. Par réduction à 0° C. au moyen du coefficient de température 0,00090, on trouve par conséquent que la résistance totale des deux tubes est égale à

$$1,27132\, S.$$

L'unité de Siemens employée était signée: *Dec* 82, Nr. 2713, $\alpha = 0,000340$, richtig bei 15°,5. Ramenée à cette température, la valeur trouvée se réduit à

1,26899 unités de Siemens.

Comme vérification, l'unité employée a été comparée avec une unité normale *B. A.* (vérifiée par Lord Rayleigh, juin 1882, n° 54, $\alpha = 0,00025$, juste à 11°,5); on a trouvé ainsi

$$1\, S = 0,95411\, B.\, A.,$$

tandis que Lord Rayleigh et Mrs. Sidgewick* ont trouve, en mesurant les résistances de colonnes de mercure dont le diamètre variait entre 1^{mm} et 2^{mm},

1 unité de mercure = 0,95418 *B.A.*

La résistance du tube trouvée par le calibrage (p. 141) était de 1,26612 unités de mercure et la correction par rapport aux quatre bouts des tubes, calculée par la formule indiquée ci-dessus, dans laquelle il faut poser $d_i = 0^{mm},6056$ et $d_e = 3^{mm},2$, était de 0,00315 unités de mercure. Par conséquent la résistance du tube, obtenue par le calibrage est de

1,26927 unités de mercure.

A supposer que mon unité de Siemens correspondît exactement à l'unité de mercure, la résistance observée était de 0,022 pour cent et, avec les expériences de Lord Rayleigh comme base, de 0,029 pour cent plus petite que la résistance théorique.

Le tube calibré n° 2 avait une résistance d'environ 7 unités de Siemens; et, pour le mieux comparer avec mon unité normale de Siemens, on a successivement fait varier le nombre des tours des câbles des deux bobines extérieures introduites dans le conduit: ainsi, l'on a d'abord dérivé l'unité de Siemens seule au galvanomètre en se servant de trois combinaisons différentes; puis, au moyen d'une quatrième combinaison, le tube qui était placé dans l'auge remplie de mercure de la manière indiquée. Si les deux résistances sont désignées respectivement par S et R, et le rapport des intensités du courant principal et du courant dérivé par $\frac{k'}{n}$, n étant

* On the specific resistance of mercury. Phil. trans. of the Roy. Soc. Part 1. 1883. p. 173.

le nombre de fois qu'on a augmenté les tours des bobines (ici successivement 9, 5, 2 et 10 fois), les résultats des mesures seront

$$t = 9^\circ,32 \qquad \begin{aligned} k'S &= 9(526,50 + G + S), \\ k'S &= 5(1635,60 + G + S), \\ k'S &= 2(5378,7 + G + S), \\ k'R &= 10(8504,7 + G + R). \end{aligned}$$

Dans le second membre de ces équations on peut avec une exactitude suffisante poser $S = 1$, $R = 7,51$, et l'on trouvera

$$R = 7,51057\, S.$$

La résistance du tube réduite à zéro sera par conséquent

* NOTE 9. 7,43243 unités de Siemens.*

La résistance trouvée par le calibrage monte à 7,42980 unités de mercure. Le diamètre intérieur du tube était $0^{mm},273$, le diamètre extérieur $3^{mm},3$, d'où l'on déduit que la correction par rapport aux bouts du tube, calculée comme ci-dessus, est égale à 0,00369 unités de mercure. La résistance corrigée monte par conséquent à

7,43349 unités de mercure.

La résistance calculée par les mesures directes est par conséquent de 0,014 pour cent plus petite que celle qu'on a calculée, si l'on suppose que l'unité normale de Siemens corresponde exactement à l'unité de mercure.

Comme les déviations trouvées de cette manière sont très petites et comme elles sont toutes dirigées dans le même sens, on peut conclure de là que la capillarité n'exerce guère d'influence appréciable sur la conductibilité du mercure.

V. *Résistance du mercure en mesures absolues.*

L'appareil de rotation était composé d'un cylindre creux de laiton, placé sur une plaque de bois et dans l'intérieur duquel se trouvait un disque de laiton ou de cuivre fixé sur un axe. Le cylindre était long de $1^{m},068$, le diamètre extérieur de $0^{m},333$, le diamètre intérieur de $0^{m},322$. Sur la surface extérieure du cylindre on avait creusé avec une machine une hélice dans laquelle était placé un câble composé de 7 fils de cuivre épais de $\frac{1}{2}^{mm}$. Chaque fil, comme aussi le câble entière, était entouré de deux couches de soie. Ce câble faisait 472 tours autour du cylindre et les bouts du câble étaient ramenés des extrémités de la bobine au milieu du cylindre et de là chacun allait rejoindre sa vis de pression placée au support du cylindre. En mesurant la hauteur de chaque cinquantième de tour, on s'est assuré que l'hélice était parfaitement régulière, et l'on a trouvé la hauteur correspondante à 472 tours égale à $998^{mm},70$.

L'axe, sur le milieu duquel était fixé le disque, était conique dans le voisinage de ses extrémités qui reposaient sur des coussinets isolés, encastrés dans les deux bases du cylindre. On pouvait le faire tourner au moyen d'une dynamo, dont l'axe de rotation était situé dans le prolongement de l'axe du cylindre et les deux axes étaient liés par deux joints universels isolés et par un tube de laiton long de $4^{m},3$, épais de 26^{mm}, que supportaient quatre coussinets solides. Quand on voulait produire une vitesse de rotation plus grande (soit plus de 30 rotations par seconde), on se servait d'une autre dynamo à fil plus mince, actionnée par une machine à vapeur; pour les vitesses plus petites, on n'avait au con-

traire besoin que du courant d'une pile galvanique de 10 à 20 éléments, qui permettait d'obtenir de 6 à 12 rotations par seconde. Une partie du courant qui traversait la dynamo était dérivée par un circuit latéral, dans lequel était intercalé un rhéostat, de sorte qu'on pouvait aisément régler la vitesse de rotation en faisant varier la résistance.

La force électromotrice induite dans le disque tournant fut transmise à un conducteur par deux contacts, l'un placé au centre de l'extrémité de l'axe, l'autre à la périphérie du disque. Le premier contact était formé d'une pointe conique de laiton, qu'un ressort pressait contre le centre de l'axe en un point où sa surface était à peine d'un millimètre carré. L'autre contact était formé d'une pièce mince, d'un centimètre de largeur, du même métal que le disque (cuivre ou laiton), qui était soudée a une barre pareillement du même métal. La pièce traversait le disque, épais de $11^{mm},8$, et était légèrement pressée contre lui; elle était revêtue derrière avec du feutre mou, de l'épaisseur d'un pouce, qui remplissait l'intervalle compris entre elle et le cylindre.

La barre était allongée en dehors du cylindre et fixée. Les deux contacts étaient huilés.

Grâce à ces dispositions, les courants thermoélectriques produits par les contacts sont restés assez faibles et constants, et le disque tournant ne fut pas échauffé d'une manière appréciable par la rotation. Du reste il n'a pas manqué au début de difficultés à surmonter pour l'arrangement des contacts.

De l'un des contacts un fil conducteur allait à la colonne de mercure, dont la résistance de conduction devait être déterminée; de là, à un galvanomètre, et de

là enfin à l'autre contact. Le mercure était renfermé dans un des tubes calibrés mentionnés ci-dessus, long d'un mètre et large de 2^{cm} ou 3^{cm}. Le tube était placé verticalement et complétement rempli de mercure; mais tandis que le courant principal parcourait toute la colonne, le courant dérivé au galvanomètre était conduit par les trous percés dans les parois du verre et par les ressorts de montre qui entouraient le tube. Il fallait que le résultat fût le même, lorsque le courant principal passait par les trous et lorsque le courant dérivé sortait des bouts de la colonne. Mais, comme cet arrangement ne présentait pas d'avantages pratiques, il ne fut pas essayé.

Il va sans dire que les forces électromotrices qui sont produites dans les fils conducteurs du galvanomètre par le disque tournant et par la colonne de mercure doivent être dirigées en sens inverse, les expériences ayant, comme on sait, pour but de déterminer la vitesse de rotation du disque à l'instant où ces deux forces électromotrices se détruisent mutuellement.

Le galvanomètre était, comme je l'ai dit ci-dessus, un galvanomètre de Thomson, et l'on s'est servi ici de la bobinette inférieure qui avait une résistance de conduction à peu près égale à 0,7 Ohm. L'influence du magnétisme terrestre sur l'aiguille aimantée n'était pas ordinairement compensée dans ces expériences par l'aimant extérieur de l'appareil, car il importait au plus haut point, que les oscillations se fissent vite (une oscillation durait environ 3 secondes). A une force électromotrice d'un millionième de volt correspondait une déviation de 120^{mm} sur l'échelle observée par la lunette. Pour la détermination de la résistance de conduction d'une colonne de mercure, résistance qui faisait 0,00024 Ohm,

l'intensité du courant était 2,9 ampères, et par conséquent la force électromotrice à mesurer 700 millionièmes de volt, ce qui correspondait à 84000^{mm} de l'échelle. Comme la déviation du zéro de l'échelle n'excéda guère 10^{mm} dans le petit nombre de secondes écoulées pendant qu'on mesurait la vitesse de rotation du disque, l'erreur correspondante ne dépasserait pas $\frac{1}{84}$ pour cent.

Le chronographe. Outre le disque mentionné ci-dessus, placé au milieu du cylindre, un autre tout semblable était fixé en dehors du cylindre et tout près de lui sur l'axe tournant. Ces deux disques, dont l'un était de laiton l'autre de cuivre, pouvaient être permutés. Un ruban de papier divisé en millimètres entourait le bord du disque extérieur, dont la circonférence se trouvait ainsi divisée en 940 parties environ. A petite distance du ruban étaient placés les bouts de deux fils de platine, desquels des étincelles électriques jaillissaient toutes les deux secondes sur le bord du disque pendant le temps qu'on mettait à mesurer la vitesse de rotation. Pour pouvoir reconnaître la succession de ces marques on a, dans tous les cas où il en était besoin, échangé les positions des deux fils après chaque étincelle; la chose était possible, parce que ces fils étaient placés dans un tube mobile autour de son axe et de telle manière que l'un des bouts de fil se trouvait dans l'axe, l'autre en dehors. De cette manière on ne déterminait que la partie fractionnaire du nombre de tours faits pendant la durée de deux secondes. Le nombre entier pouvait ou être déterminé directement ou être considéré comme connu; car la détermination de ce nombre entier ne comportait par d'erreur possible.

Les deux fils de platine étaient en relation avec

une machine de Ruhmkorff, dont le courant principal était interrompu toutes les deux secondes. Cette interruption fut dans toutes expériences finales produite par le moyen suivant, simple mais parfaitement satisfaisant. En avant du chronomètre était placée une horloge à pendule, dont on se servait à l'ordinaire pour faire des expériences sur la chute des corps et dont la marche a souvent été comparée avec celle du chronomètre par la détermination des battements de pendule coïncidants. A la pointe inférieure du pendule était fixé un fil de soie long d'un mètre à un mètre et demi, dont l'autre bout était fixé à la même hauteur, dans le plan d'oscillation du pendule, de manière que le fil fût faiblement tendu par chaque oscillation double du pendule. Au milieu de ce fil était suspendue une petite pièce de cuivre, recourbée en arc, dout les deux branches passaient par deux œils dans deux verres cylindriques, l'un entièrement rempli de mercure, l'autre rempli à moitié d'alcool, à moitié de mercure.

Pendant les oscillations du pendule, la petite pièce de cuivre reposait la plupart du temps sur les œils, et ce n'est que quand le fil était tendu, qu'elle se trouvait lancée en haut avec une grande vitesse; et tout était réglé de manière que la pointe d'une branche de l'arc fût élévée au-dessus du mercure dans l'alcool, au moment où l'on jugeait que la vitesse était la plus grande. Par ce mouvement on interrompait le courant principal de l'appareil de Ruhmkorff et en même temps l'étincelle électrique jaillissait sur le disque tournant.

Disposition des expériences. Les appareils étaient placés dans deux chambres séparées par une troisième. Dans la plus grande se trouvaient l'appareil de rotation,

la dynamo, le chronographe et la colonne de mercure dont il fallait mesurer la résistance. L'axe commun de l'appareil de rotation et de la dynamo était dirigé approximativement de l'est à l'ouest et l'on avait eu soin de ne laisser aucun objet de fer dans le voisinage de l'appareil de rotation. Tous les fils conducteurs allaient de ces appareils à l'autre chambre où le galvanomètre était placé, à une distance de 10 mètres de l'appareil de rotation et de 15 mètres de la dynamo. Outre cela différents commutateurs, clefs et rhéostats se trouvaient là à portée de l'observateur. A un commutateur aboutissaient les fils conducteurs d'une pile de 24 éléments de Bunsen placée à l'autre extrémité du bâtiment. Du commutateur les fils allaient aux tours de l'appareil de rotation et de là, en suivant un câble suspendu en l'air, ils arrivaient à la colonne de mercure et revenaient au commutateur. Près de l'observateur était intercalée une clef, de manière que le courant ne fût fermé que par une pression exercée sur elle.

Une autre pile de 10 à 20 éléments servit comme force motrice de la dynamo, avec laquelle elle communiquait par un circuit direct. Sur ce circuit fut ramifié un circuit latéral qui était en communication avec un rhéostat à liquide, placé près de l'observateur. Ce rhéostat consistait en un verre haut et cylindrique, rempli d'une solution saturée de vitriol de cuivre, au fond duquel était placée comme électrode négative une plaque de cuivre, tandis qu'un fil épais de cuivre, qu'on pouvait aisément éléver ou abaisser, servit comme électrode positive. Parfois on intercalait aussi un rhéostat à bouchon. De cette manière on pouvait sans difficulté, en

ajustant la résistance du rhéostat, régler la vitesse de la dynamo et la conserver constante.

On pouvait faire fonctionner l'appareil de Ruhmkorff au moyen de quatre éléments, qu'un circuit reliait à une clef placée près de l'observateur. A l'aide de cette clef on pouvait faire fonctionner le chronographe au moment où l'on mesurait la vitesse de rotation.

Enfin un courant dérivé d'un seul élément de Daniell a servi à compenser les courants thermoélectriques dans les fils conducteurs du galvanomètre. Dans le circuit de l'élément était intercalée la résistance nécessaire d'un rhéostat, et une partie de ce circuit, un fil de cuivre long de $\frac{1}{2}^{m}$, épais de $\frac{3}{2}^{mm}$, était introduit dans le circuit du galvanomètre. La résistance du rhéostat intercalé s'élevait en général à quelques milliers d'unités de Siemens et la force nécessaire à la compensation ne dépassa que rarement 3 millionièmes de volt. Ce courant dérivé a servi en même temps à faire voir si le circuit du galvanomètre fonctionnait bien, car l'expérience eut bientôt fait reconnaître quelle était la déviation du galvanomètre qui devait être produite par une variation donnée de la résistance du rhéostat.

Enfin on doit ajouter qu'on avait aussi introduit un commutateur dans le circuit du galvanomètre.

Les expériences ont été faites de la manière suivante. Après avoir fait tourner la dynamo, on a fermé par la pression d'une clef le courant qui de la pile passa par les tours de l'appareil de rotation, et en observant la déviation du galvanomètre dans une lunette on a réglé la vitesse de rotation par le rhéostat à liquide, de manière que le miroir du galvanomètre fût approximativement au zéro. Puis on a interrompu le courant de

la pile qui passa par l'appareil de rotation et, en continuant à faire tourner l'appareil de rotation, on a compensé le courant thermoélectrique de la manière indiquée ci-dessus. Puis on a de nouveau fermé le courant de l'appareil de rotation et réglé exactement la rotation par le rhéostat à liquide. Pendant que le miroir du galvomètre dépassait le zéro avec une vitesse faible, le courant qui traversait l'appareil de Ruhmkorff fut fermé par une pression sur l'autre clef, et de cette manière on a fait fonctionner le chronographe.

Après deux et parfois plusieurs décharges successives séparées par un intervalle de deux secondes, qui furent distinctement entendues de l'observateur, tous les courants ont été interrompus, la rotation arrêtée, et l'on a noté toutes les marques des étincelles sur le ruban de papier. Immédiatement après, on a répété l'expérience en faisant parcourir au courant l'appareil de rotation en sens inverse, et l'on a fait deux mesures correspondantes en échangeant les fils conducteurs du galvanomètre.

Enfin, on a reconnu qu'il était nécessaire de faire les quatre mêmes mesures pour la rotation inverse en changeant les fils de l'armature tournante de la dynamo. On a de cette manière combiné 8 expériences immédiatement consécutives en un groupe, et l'on a pris la moyenne de ces 8 expériences.

Pendant la durée des expériences on a souvent observé la température du mercure au moyen d'un thermomètre divisé en dixièmes de degré. On a souvent essayé de permuter les pôles des différentes batteries; mais on a reconnu que ce changement était sans influence sur le résultat final.

Enfin je remarquerai que, quand on fermait et ouvrait le circuit du courant qui parcourait l'appareil de rotation, il s'est parfois produit des décharges d'induction dans la partie du circuit du galvanomètre qui se trouvait au voisinage des bobines de l'appareil de rotation, ce qui pouvait rendre l'observation pénible; mais il n'était pas difficile d'éviter ces décharges en modifiant la position de la partie du circuit du galvanomètre qui se trouvait dans le voisinage des tours de l'appareil de rotation et qui avait produit ces décharges d'induction.

Calcul de la constante de l'appareil de rotation. Si l'on désigne la résistance de la colonne de mercure dérivée par R, par n le nombre de rotations du disque par seconde trouvé par les mesures et par C la constante de l'appareil de rotation, on doit avoir

$$R = nC.$$

Je me bornerai ici à indiquer le calcul de cette constante dans le cas où le disque tournant est infiniment mince, où le centre du disque coïncide exactement avec l'axe commun de rotation et l'axe du cylindre, et où de plus le contact central se trouve exactement sur cet axe; car les écarts qui existent entre ces conditions et la réalité donnent lieu à des corrections si petites qu'on peut négliger leur évaluation précise. Soient d la hauteur de l'hélice, dans laquelle on a placé le fil du cylindre, r le rayon des tours, ρ le rayon du disque, a_1 et a_2 les distances du disque aux tours extrêmes du fil; la constante C doit être calculée par la formule

$$C = \frac{2\pi}{d}\int_{-a_2}^{a_1} dx \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{r\rho\cos\theta}{\sqrt{x^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\theta}}.^*$$

* NOTE 10.

Si l'on pose ici pour abréger $\rho = qr$, $x^2+r^2 = \alpha r^2$, et pareilement $a_1^2+r^2 = \alpha_1 r^2$, $a_2^2+r^2 = \alpha_2 r^2$ et de plus

$$Q_\alpha = \int_1^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \cos\theta}{\sqrt{\alpha+q^2-2q\cos\theta}},$$

on obtiendra

$$C = \frac{\pi q r^2}{d}[Q_{\alpha_1}+Q_{\alpha_2}].$$

Si l'on développe l'intégrale double en série, on obtiendra

$$Q_\alpha = 2\pi q\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left[1+\frac{3q^2}{8\alpha^2}+\frac{5q^4}{16\alpha^4}\left(\frac{7}{4}-\alpha\right)\right.$$
$$\left.+\frac{35q^6}{128\alpha^6}\left(\frac{33}{8}-\frac{9}{2}\alpha+\alpha^2\right)+\ldots\right],$$

où le nombre des termes indiqués suffit pour le calcul numérique. Le développement complet donne

$$*Q_\alpha = 2\pi\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{2m+1}\frac{1\cdot 3\ldots 2m-1}{2\cdot 4\ldots 2m}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\ldots m+1}\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}.$$

* NOTE 11.

Résultats des mesures. Les mesures avec l'appareil de rotation n'ont pu commencer qu'à la fin de mars (1884), et j'ai communiqué le résultat des premières mesures (une unité de mercure égale à 0,9417 Ohm) à la conférence internationale tenue le 28 avril, en ajoutant qu'on ne pouvait considérer ce résultat que comme provisoire, car je n'avais pas encore réussi à obtenir une concordance satisfaisante entre les diverses mesures particulières. Il en fut encore de même dans les expériences suivantes, jusqu'à ce que j'eusse essayé de répéter les expériences à direction de rotation inverse. Je chercherai à m'expliquer avec plus de précision.

Une isolation parfaite est impossible dans des expériences électriques; mais il est exceptionnel qu'un défaut d'isolation complètement inévitable puisse, comme c'était le cas ici, avoir une influence appréciable sur le résultat. Le circuit du galvanomètre était en deux points A et B en communication avec la colonne de mercure dont il fallait mesurer la résistance, et qui était parcourue par un courant électrique d'une grande intensité i.

La résistance AB était très faible, savoir 0,00026 jusqu'à 0,0015 unités de mercure. Si de plus un point C du circuit du galvanomètre est en communication faible avec un point D du circuit principal, une partie relativement considérable du courant principal sera dérivée par là au galvanomètre. Or si l'on désigne par CD la résistance entre les deux circuits, et par r la résistance de la partie du circuit fermé du galvanomètre qui va de A ou B à C par le chemin qui ne contient pas le galvanomètre, la force électromotrice E dérivée au galvanomètre, qui pendant les expériences est équilibrée par la force électromotrice induite dans le même circuit, peut approximativement être exprimée par

$$E = i \cdot AB \left[1 \pm \frac{BD}{AB} \cdot \frac{r}{CD} \right],$$

en supposant que la résistance AB est très petite en comparaison de BD et r, comme aussi que CD est très grand en comparaison des autres résistances. Le signe supérieur correspond au cas, où le galvanomètre est situé dans le circuit de A à C, l'inférieur au cas où il se trouve dans le circuit de B à C. Quand l'expérience est répétée avec une rotation inverse du disque, les bouts du circuit du galvanomètre en A et en B doivent

être permutés, ce qui change le signe du second terme. On reconnaît ainsi que l'erreur provenant de la communication de C et D peut être éliminée par la répétition de l'expérience avec rotation inverse, en prenant la moyenne des deux résultats.

Je citerai comme exemple la première expérience faite à rotations inverses. Le courant principal passa cinq fois autour du cylindre de rotation, et la résistance de ce conduit, qui approximativement doit être égale à la résistance BD ci-dessus, était 195 unités de Siemens. De plus on avait dans cette expérience $AB = 0{,}00154$ u. de S. Le nombre de rotations du disque en deux secondes était à droite 14,6820, à gauche 14,5751; la déviation de la moyenne était par conséquent 0,37 pour cent. On aura donc dans ce cas, en vertu de la formule indiquée ci-dessus,

$$0{,}0037 = \frac{195}{0{,}00154} \cdot \frac{r}{CD},$$

d'où

$$CD = 34 \cdot 10^6 \cdot r.$$

Si l'on pose ici après estimation $r = 0{,}5$ u. de S., le résultat sera qu'un défaut d'isolation par suite duquel la résistance monterait à 17 millions u. de S. suffirait à expliquer la déviation mise en évidence par les expériences à rotations inverses. Comme il était nécessaire que les deux circuits fussent situés tout près l'un de l'autre tant par l'appareil de rotation que dans le voisinage de l'observateur, on ne pouvait guère éviter de si petits défauts d'isolation; c'est pourquoi ces erreurs devaient être éliminées par les expériences.

L'isolation des fils particuliers du câble n'était pas satisfaisante au commencement, surtout quand l'air était

humide, c'est pourquoi on a plusieurs fois trempé le câble dans une solution étendue de gomme-laque. Après une durée d'une semaine, on a trouvé que la plus faible résistance des couches isolant les six fils les uns des autres et les isolant du cylindre était 500000 u. de S., isolation qui suffit ici. Il fallut au contraire rejeter le septième fil, et pendant la durée des expériences il fallut encore rejeter un fil, parce que l'isolation diminuait; de sorte qu'on ne s'est servi que de cinq fils dans les expériences finales.

Les mesures détaillées de l'appareil de rotation ont donné les résultats suivants, l'unité étant partout le centimètre.

Rayon des tours de fil

$$r = 16{,}65.$$

Hauteur de l'hélice:

$$d = 0{,}211589$$

distances du milieu du disque aux tours extrêmes du fil:

$$a_1 = 50{,}99\,, \quad a_2 = 49{,}80\,.$$

Les mesures du diamètre 2ρ du disque de laiton, faites avant les expériences, ont, pour quatre endroits différents, donné les résultats:

$$29{,}897\,, \qquad 29{,}909\,, \qquad 29{,}901\,, \qquad 29{,}913\,,$$

en moyenne

$$29{,}905\,.$$

Après l'exécution d'un grand nombre d'expériences faites avec l'appareil et immédiatement avant les expériences finales, on a trouvé

29,889, 29,879, 29,894,

moyenne

* NOTE 12. 29,8933,*

et, après l'achèvement de toutes les expériences,

29,889, 29,894, 29,898,

moyenne

29,8937.

Les derniers résultats presque identiques font voir qu'aucune usure appréciable n'avait eu lieu par l'effet des expériences finales. Au contraire l'influence de l'usure était très sensible sur le disque de cuivre, pour lequel on a trouvé les diamètres suivants avant et après les expériences finales:

29,867, 29,871, 29,872, moyenne 29,870,
29,856, 29,853, 29,859, moyenne 29,856.

La constante C calculée avec ces valeurs numériques par la formule développée ci-dessus, diminuée de la correction mentionnée au même endroit, correction qui ne monte qu'à 0,6 unités, est pour le disque de laiton

* NOTE 13. 39656,1,*

et pour le disque de cuivre avant et après les expériences finales

39594,1 et 39556,1,

et de ces deux valeurs limites on a calculé par interpolation les constantes correspondant à chacune des trois séries d'expériences faites avec ce disque.

Cette constante calculée pour 0° devient à $t°$ égale à $C(1+bt)$, où $b = 0{,}000018$ est le coefficient de dilatation linéaire du laiton.

Désignons le nombre de rotations du disque en deux secondes du chronographe par $m + \frac{n}{p}$, où m est le nombre entier de rotations, n le nombre de millimètres lu sur le ruban de papier entre deux marques de deux étincelles successives, et p la longueur du ruban de papier en millimètres. De plus soient σ secondes de chronographe égales à une seconde, s le nombre de fils du câble introduits en série, R la résistance de la colonne de mercure en unités de mercure à 0° et γ (= 0,00090) de coefficient apparent de température de cette résistance.

On obtiendra alors

$$1 \text{ u. de merc.} = \tfrac{1}{2}\sigma\left(m + \frac{n}{p}\right)\frac{Cs}{R}\frac{(1+bt)}{(1+\gamma t)} \text{ Ohm. abs.}$$

Je me bornerai ici à rapporter les résultats de mes mesures finales qui ont toutes été faites entre le 9 et le 13 juin 1884, et dont je me suis servi exclusivement pour la détermination la plus probable de la résistance en unités de mercure, correspondante à l'Ohm, qui résulte de mes expériences.

Tube n° 1. Disque de laiton. Les valeurs de n, pour la détermination desquelles on a changé successivement la direction du courant de l'appareil de rotation et du galvanomètre, étaient:

491,0, 583,7, 514,0, 571,0,

et par répétition des mêmes mesures

492,6, 581,3, 496,5, 592,6,

en moyenne 540,34.

Après avoir changé le sens de la rotation, on a trouvé les valeurs analogues

651,1, 676,8, 626,4, 592,5,
663,1, 681,7, 648,2, 586,4,

en moyenne 640,77.

On déduit de là pour la première direction de rotation, comme $m = 14$, $p = 939,6$

$$m + \frac{n}{p} = 14,5751,$$

et pour l'autre

$$m + \frac{n}{p} = 14,6820.$$

De plus on a

$$s = 5, \quad \sigma = 1,01924, \quad t = 17^\circ,06, \quad R = 0,0015418,$$
$$C = 39656,1,$$

d'où l'on tire

* NOTE 14. 1 u. de merc. = 0,94455 Ohm. abs.*

Les expériences suivantes ont été exécutées avec le disque de cuivre et le tube calibré n° 2, qui a contenu les trois colonnes de mercure *AB*, *BC*, *CD*. La résistance de chaque colonne en particulier était à peu près 6 fois plus petite que celle du tube n° 1; c'est pourquoi on avait réuni les cinq fils du câble de l'appareil de rotation en un; par suite la résistance du câble fut divisée 25 fois et l'intensité du courant multipliée par 12. Il suit de là que, bien que la résistance mesurée fût 6 fois plus petite que dans la première série d'expériences, la force électromotrice était double; ce qui donne à penser que l'exactitude des expériences suivantes est approximativement double. De même la différence des

résultats obtenus ici par les rotations inverses doit, aussi, être diminuée, si le défaut d'isolation ne varie pas.

Tube n° 2, AB. Disque de cuivre.

Valeurs de n

243,5,	253,0,	234,1,	239,8,
250,8,	258,6,	245,2,	....,

moyenne 246,4.

Par rotation inverse

271,6,	280,4,	269,8,	277,6,
260,0,	269,6,	270,0,	271,5,

moyenne 258,9.* * NOTE 15.

De plus on avait

$$m = 12, \quad p = 939{,}5, \quad s = 1, \quad \sigma = 1{,}01977,$$
$$t = 17^\circ{,}97, \quad R = 0{,}00025836, \quad C = 39578{,}5,$$

d'où l'on déduit:

1 u. de merc. = 0,94391 Ohm. abs.

Tube n° 2, BC. Disque de cuivre.

Valeurs de n

351,5,	325,2,	341,4,	324,6,

moyenne 335,7.

Par rotation inverse

349,8,	324,8,	343,8,	321,5,

moyenne 335,0.

$$m = 12, \quad p = 940, \quad s = 1, \quad \sigma = 1{,}01915,$$
$$t = 18^\circ{,}73, \quad R = 0{,}00025964, \quad C = 39571{,}0,$$

d'où l'on déduit:

1 u. de merc. = 0,94410 Ohm. abs.

Tube n° 2, CD. Disque de cuivre.

Valeurs de n:

$$432{,}8, \quad 435{,}9, \quad 436{,}1, \quad 441{,}2,$$

moyenne 436,5.

$$t = 18^\circ{,}32, \quad \sigma = 1{,}01935.$$

Par rotation inverse

$$487{,}7, \quad 518{,}4, \quad 496{,}0, \quad 518{,}2,$$
$$495{,}8, \quad 522{,}0, \quad 484{,}2, \quad 511{,}6,$$

moyenne 504,24.

$$t = 18^\circ{,}36, \quad \sigma = 1{,}01945.$$

$m = 12$, $p = 941{,}5$, $R = 0{,}00026279$, $C = 39562{,}2$,

d'où l'on déduit:

$$1 \text{ u. de merc.} = 0{,}94391 \text{ Ohm. abs.}$$

De la combinaison de ces résultats des mesures résultent comme valeurs finales les plus probables

1 unité de mercure = 0,9440 Ohm. abs.,
1 Ohm. abs. = 1,0593 unités de mercure.

Ce résultat concorde presque complètement avec ceux qu'ont trouvés F. Kohlrausch et Roiti, tandisque les procédés employés diffèrent essentiellement. Les résultats qui ont été communiqués à la conférence internationale font surtout ressortir — en premier lieu comme Wild est récemment parvenu à un résultat qui, après la correction d'une erreur, concorde complètement avec la moyenne du reste — qu'aucune des méthodes appliquées n'entraîne guère d'erreurs constantes.

J'avais eu des doutes sur la légitimité de l'emploi des courants variables; car il était possible que des

différences intérieures thermoélectriques dans un conducteur eussent la même influence que, par exemple, la polarisation d'un électrolyte et en particulier produisissent une résistance plus petite que pour des courants constants. Je peux à présent abandonner tout à fait ce doute; car je suis parvenu à la même conclusion par des voies différentes.

Tant pour mes déterminations des résistances relatives que pour celles des résistances absolues, qui ont été faites avec des courants constants, j'ai souvent répété les mêmes mesures avec des courants intermittents; mais dans aucun cas il ne s'est manifesté aucune différence dans les résultats. J'ajouterai encore une remarque, qui n'est pas tout à fait dépourvue d'intérêt. S'il existait en réalité une différence appréciable de conduction entre les courants constants et les courants variables, elle influerait sur la constante d'induction d'un conducteur. Par des expériences antérieures j'avais en vérité trouvé un petit écart entre les constantes observées et les constantes calculées*; les premières étaient en moyenne de 5 à 6 pour cent plus petites que les dernières. Le calcul était fait comme à l'ordinaire, c'est-à-dire sans tenir assez compte de ce fait, que la densité du courant est, pour les courants variables, une fonction de la distance à l'axe du fil conducteur. Après avoir tenu compte de cette circonstance, j'ai reconnu que la constante d'induction, trouvée par la méthode ordinaire, devait être diminuée de la longueur du fil, et cette correction correspond à peu près à l'écart constaté.

---

* Voir le mémoire suivant: Sur la propagation de l'électricité. Overs. o. d. K. D. Vidensk. Selsk. Forhandlinger 1879.

Comme, par suite, les divergences entre les déterminations de l'Ohm faites par différents savants peuvent être considérées comme accidentelles, on doit certainement tenir la valeur de l'Ohm adoptée par la conférence, savoir

1 Ohm = 1,06 unités de mercure,

qui se rapproche le plus de la moyenne de toutes les expériences, pour être la valeur la plus exacte obtenue jusqu'ici. De plus, on a vraisemblablement obtenu par cette détermination le degré de précision, qu'on avait primitivement en vue, savoir la précision d'un millième.

NOTES.

NOTE 1. Une analyse de se mémoire se trouve dans les „Fortschritte der Physik“, t. 41, p. 616—618.

NOTE 2. Pour influencer l'aiguille du galvanomètre.

NOTE 3. Ces expressions ne sont pas exactes en toute rigueur, car x n'est pas absolument constant. Les erreurs introduites par là ne sont pourtant guère appréciables.

NOTE 4. On a $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = 0$.

NOTE 5. R est la résistance d'une colonne de mercure qui à 0° C. remplit le tube. R sera déterminée par l'équation

$$R = \frac{R'(1+gt')^2(1+b(t'-t_0))(1+b(t''-t_0))}{(1+gt'')(1+\gamma t')},$$

qui se réduit à l'expression de Lorenz, si l'on néglige les puissances d'ordre supérieur de b, g et γ.

NOTE 6. Les nombres ne concordent pas mutuellement, car on doit avoir $L = L' + \lambda'_1 + \lambda'_n = L'' + \lambda''_1 + \lambda''_n$, ce qui donne $L = 445{,}37$ ou $445{,}38$.

NOTE 7. 0,00154172 d'après mes calculs.

NOTE 8. 0,00025846 d'après mes calculs.

NOTE 9. Mes calculs donnent 7,43252.

NOTE 10. Voir le mémoire „La résistance électrique du mercure en mesures absolues", pag. 103 et note 3, p. 109.

NOTE 11. La déduction de la formule

$$Q_\alpha = 2\pi \sum_{m=0}^{m=\infty} q^{2m+1} \frac{1\cdot 3\ldots 2m-1}{2\cdot 4\ldots 2m} \cdot \frac{1}{1\cdot 2\ldots (m+1)} \frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}$$

peut se faire de la manière suivante.

On a, en vertu de la définition,

$$Q_\alpha = \int_1^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\alpha+q^2-2q\cos\theta}},$$

et, comme α est plus grand que q, en développant $\frac{1}{\sqrt{\alpha+q^2-2q\cos\theta}}$ en série de fonctions sphériques

$$Q_\alpha = \sum_0^\infty q^{2m+1} \int_1^\alpha \frac{d\alpha}{\alpha^{m+1}\sqrt{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} \cos\theta\, P_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right) d\theta;$$

car les coefficients des puisances paires de q s'évanouissent, parce que $\cos\theta$ ne figure que par ses puissances impaires.

Si l'on pose

$$Q_m = \int_1^\alpha \frac{d\alpha}{\alpha^{m+1}\sqrt{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} \cos\theta\, P_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right) d\theta;$$

on peut trouver une équation différentielle linéaire à laquelle satisfait Q_m.

On a en effet

$$\frac{dQ_m}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha^{m+1}\sqrt{\alpha-1}}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, P_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)d\theta$$

et en intégrant par parties

$$\frac{dQ_m}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha^{m+1}\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, P'_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)d\theta.$$

On déduit de là

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\, P_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)d\theta = \alpha^{m+1}\sqrt{(\alpha-1)}\,\frac{dQ_m}{d\alpha},$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, P'_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)d\theta = \alpha^{m+1+\frac{1}{2}}\sqrt{(\alpha-1)}\,\frac{dQ_m}{d\alpha}.$$

Si l'on différentie par rapport à α, on obtient

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, P'_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)d\theta = -2\alpha^{m+2+\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha-1}\,\frac{d^2Q_m}{d\alpha^2}$$
$$-\frac{(2m+3)\alpha^{m+2+\frac{1}{2}}-2(m+1)\alpha^{m+1+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha-1}}\,\frac{dQ_m}{d\alpha},$$

et de même

$$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\, P''_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)d\theta$$
$$= 4\alpha^{m+4}\sqrt{\alpha-1}\,\frac{d^3Q_m}{d\alpha^3} + 2\,\frac{(4m+9)\alpha^{m+4}-(4m+7)\alpha^{m+3}}{\sqrt{\alpha-1}}\,\frac{d^2Q_m}{d\alpha^2}$$
$$-\frac{\left\{\begin{array}{l}(2m+3)(2m+4)\alpha^{m+4}-[(2m+3)(2m+5)+(2m+2)^2]\alpha^{m+3}\\ \quad+(2m+2)(2m+3)\alpha^{m+2}\end{array}\right\}}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha-1}}\,\frac{dQ_m}{d\alpha}.$$

Puis, des expressions de $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, P'_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right) d\theta$ et de $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, P'_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right) d\theta$, on conclut

$$\int_0^{2\pi} P'_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right) d\theta = -2\,\alpha^{m+2+\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha-1}\,\frac{d^2 Q_m}{d\alpha^2}$$
$$-\frac{(2m+2)\,\alpha^{m+2+\frac{1}{2}}-(2m+1)\,\alpha^{m+1+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha-1}}\,\frac{d\,Q_m}{d\,\alpha},$$

et, par différentiation de la dernière expression,

$$\int_0^{\pi} \cos\theta\, P''_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right) d\,\theta$$
$$= 4\,\alpha^{m+4}\sqrt{\alpha-1}\,\frac{d^3 Q_m}{d\,\alpha^3} + 2\,\frac{(4m+8)\,\alpha^{m+4}-(4m+6)\,\alpha^{m+3}}{\sqrt{\alpha-1}}\,\frac{d^2 Q_m}{d\,\alpha^2}$$
$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}(2m+2)(2m+4)\,\alpha^{m+4}-[(2m+2)(2m+5)+(2m+1)(2m+2)]\alpha^{m+3}\\ \quad +(2m+1)(2m+3)\,\alpha^{m+2}\end{array}\right\}}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha-1}}\,\frac{dQ_m}{d\alpha}.$$

Mais, comme on sait,

$$(1-x^2)\,P''_{2m+1}(x) - 2\,x\,P'_{2m+1}(x) + (2m+1)(2m+2)\,P_{2m+1}(x) = 0,$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\left[\left(1-\frac{\cos^2\theta}{\alpha}\right) P''_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right) - 2\,\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\,P'_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)\right.$$
$$\left. +(2m+1)(2m+2)\,P_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)\right] d\,\theta = 0.$$

Si l'on substitue les valeurs des intégrales qui entrent dans cette relation, on en déduira l'équation différentielle

$$(1)\quad (\alpha-1)\,\alpha\,\frac{d^3 Q_m}{d\,\alpha^3} + \left[2\,(m+2)\,\alpha-(2m+\tfrac{5}{2})\right]\frac{d^2 Q_m}{d\,\alpha^2} + (m+1)(m+2)\,\frac{dQ_m}{d\alpha} = 0.$$

En différentiant cette équation r fois, on obtiendra

$$(\alpha-1)\alpha\frac{d^{r+3}Q_m}{d\alpha^{r+3}}+[r(2\alpha-1)+2(m+2)\alpha-(2m+\tfrac{5}{2})]\frac{d^{r+2}Q_m}{d\alpha^{r+2}}$$
$$+[r^2+(2m+3)r+(m+2)(m+1)]\frac{d^{r+1}Q_m}{d\alpha^{r+1}}=0.$$

En égalant le dernier terme de cette équation à zéro, on trouve

$$r=\begin{cases}-(m+1)\\-(m+2);\end{cases}$$

dans le dernier cas l'équation différentielle se réduira à

$$(\alpha-1)\alpha\frac{d^{-(m-1)}Q_m}{d\alpha^{-(m-1)}}-(m+\tfrac{1}{2})\frac{d^{-m}Q_m}{d\alpha^{-m}}=0;$$

c'est-à-dire que l'intégrale de l'équation

$$(A)\qquad (\alpha-1)\alpha\frac{du}{d\alpha}-(m+\tfrac{1}{2})u=0,$$

différentiée m fois, donne une intégrale de l'équation

$$(B)\quad (\alpha-1)\alpha\frac{d^3v}{d\alpha^3}+[2(m+2)\alpha-(2m+\tfrac{5}{2})]\frac{d^2v}{d\alpha^2}+(m+2)(m+1)\frac{dv}{d\alpha}=0.$$

Mais on a

$$u=c\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}},$$

où c est une constante arbitraire, et par conséquent (B) admet l'intégrale particulière

$$v=c\frac{d^m\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{d\alpha^m}.$$

Mais, comme on le reconnaît facilement, toute intégrale de l'équation

$$(A') \qquad (\alpha-1)\alpha\frac{du}{d\alpha}-(m+\tfrac{1}{2})u = \varphi(\alpha),$$

où $\varphi(\alpha)$ est un polynôme entier et arbitraire du degré $m-1$, donnera aussi par m différentiations successives une intégrale de l'équation (B). L'intégrale générale de (A') est

$$u = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}\int\varphi(\alpha)\frac{\alpha^{m-\frac{1}{2}}}{(\alpha-1)^{m+\frac{3}{2}}}d\alpha.$$

Si l'on pose $\varphi(\alpha) = \alpha-1$,

$$u = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}\int\frac{\alpha^{m-\frac{1}{2}}}{(\alpha-1)^{m+\frac{1}{2}}}d\alpha$$

sera une intégrale particulière de (B), et l'intégrale générale sera

$$v = c_1\frac{d^m\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{d\alpha^m}+c_2\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}\int_p^\alpha\frac{\alpha^{m-\frac{1}{2}}}{(\alpha-1)^{m+\frac{1}{2}}}d\alpha+c_3,$$

où p est une constante arbitraire.

De l'équation (B) on déduit

$$(\alpha-1)\alpha\frac{d^2v}{d\alpha^2}+[2(m+1)\alpha-(2m+\tfrac{3}{2})]\frac{dv}{d\alpha}+m(m+1)v = C,$$

et nous avons établi l'équation

$$\frac{-\sqrt{\alpha-1}}{2\alpha^{m+1+\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, P'_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)d\theta$$

$$= \alpha(\alpha-1)\frac{d^2Q_m}{d\alpha^2}+[(m+\tfrac{3}{2})\alpha-(m+1)]\frac{dQ_m}{d\alpha}$$

$$= \alpha(\alpha-1)\frac{d^2Q_m}{d\alpha^2}+[2(m+1)\alpha-(2m+\tfrac{3}{2})]\frac{dQ_m}{d\alpha}$$

$$-(m+\tfrac{1}{2})(\alpha-1)\frac{dQ_m}{d\alpha}$$

$$= C-m(m+1)Q_m-(m+\tfrac{1}{2})(\alpha-1)\frac{dQ_m}{d\alpha},$$

si l'on fait la supposition que v dans l'équation précédente soit égal à Q_m. Cela fait voir que C est dans ce cas égal à zéro. Q_m satisfait donc à l'équation

$$(C)\quad (\alpha-1)\alpha\frac{d^2v}{d\alpha^2}+[2(m+1)\alpha-(2m+\tfrac{3}{2})]\frac{dv}{d\alpha}+m(m+1)v=0,$$

qui a pour intégrale générale

$$v=c_1\frac{d_m\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{d\alpha^m}+c_2\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}\int_p^\alpha\frac{\alpha^{m-\frac{1}{2}}d\alpha}{(\alpha-1)^{m+\frac{1}{2}}}\right),$$

et comme Q_m doit s'évanouir pour $\alpha=1$, il faut que $c_2=0$; car

$$\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}\int_p^\alpha\frac{\alpha^{m-\frac{1}{2}}d\alpha}{(\alpha-1)^{m+\frac{1}{2}}},$$

qui peut être développé en une série de la forme

$$\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(C_0\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}+C_1\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)+C_2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2+\dots\right.$$
$$\left.+C_m\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}l(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha-1})\right),$$

ne s'évanouira pas pour $\alpha=1$. On aura donc

$$Q_m=c_1\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}.$$

Reste encore à déterminer c_1. Mais on a

$$\frac{dQ_m}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha^{m+1}\sqrt{\alpha-1}}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, P_{2m+1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\alpha}}\right)d\theta$$
$$=c_1\frac{d^{m+1}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{d\alpha^{m+1}},$$

et c_1 sera déterminé en comparant les coefficients de $a^{-(m+2)}$ dans les deux derniers membres de cette équation.

On a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

et le coefficient de $a^{-(m+2)}$ dans le premier membre sera

$$(-1)^m \frac{(2m+1)}{1} \cdot \frac{2m}{2} \cdot \frac{(2m-1)}{3} \cdots \frac{(m+2)}{m} \cdot \frac{(2m+2)!}{2^{2m+1} \cdot (2m+1)!} \pi$$

$$= (-1)^m \frac{(2m+1)(2m-1) \cdots 3 \cdot 1}{m!\, 2^m} \pi,$$

et dans le second membre

$$(-1)^m c_1 (m+1)! \frac{2m+1}{2},$$

par conséquent

$$c_1 = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2m} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} \cdot 2\pi.$$

NOTE **12.** La moyenne des nombres cités est 29,8874; mais on obtiendrait la moyenne indiquée 29,8933, si l'on remplaçait le nombre 29,879 par 29,897.

NOTE **13.** Mes calculs donnent pour le disque de laiton $C = 39689$ et pour le disque de cuivre 39626 et 39588, ce qui ne modifierait pas les deux premières décimales des nombres qui expriment l'unité de mercure en unités absolues.

NOTE **14.** Les nombres qui expriment l'unité de mercure en Ohms absolus ne concordent pas avec la formule de la page 167. Cette formule donnerait ces nombres multipliés par 10^9. Si l'on se sert des mêmes notations

que dans le mémoire intitulé „La résistance électrique du mercure en mesures absolues“, on doit, dans la formule citée, remplacer 1 Ohm abs. par une unité abs., et poser 1 Ohm abs. $= 10^9$ unités abs. (l'unité de longueur étant 1^{cm}).

NOTE **15**. $271{,}3 \cdot 258{,}9$ est la moyenne de $271{,}3$ et $246{,}4$.

SUR

LA PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ.

SUR LA PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ.

VIDENSK. SELSK. OVERS. 1879. P. 41—72.
WIED. ANN., T. VII, P. 161—193.*

* NOTE 1.

Il ne peut guère échapper à l'attention de ceux qui sont au courant des recherches sur la propagation de l'électricité, que nous n'avons point d'expériences sur la propagation des courants périodiques dans les fils conducteurs, qui soient en pleine concordance avec la théorie. M. Feddersen*, après avoir par ses belles expériences démontré l'existence de décharges oscillatoires, prévues théoriquement par M. W. Thomson**, qui peuvent se produire dans certaines conditions, avait déterminé le phénomène avec plus de précision par une suite de mesures, et par là fourni de bons matériaux, auxquels M. Kirchhoff*** à son tour appliqua bientôt après la théorie. Ces expériences étaient dans leur ensemble admirablement propres à cet objet, et en général la théorie a bien soutenu cette épreuve. Ce n'est qu'à propos de la durée des oscillations qu'il s'est manifesté une divergence essentielle entre les calculs et les observations, car la durée observée était en général presque double de celle qu'on avait calculée. Kirchhoff fait bien remarquer, dans l'introduction à ses calculs, que

* Pogg. Ann., t. CXIII, p. 437 et t. CXVI, p. 132.
** Phil. Mag., t. V, 1853, p. 393.
*** Pogg. Ann., t. 121, p. 551.

la connaissance imparfaite des conditions nécessaires pour produire et continuer l'étincelle électrique constitue un obtacle essentiel à l'établissement d'une théorie exacte du courant de décharge de la bouteille de Leyde; mais il résulte des expériences elles-mêmes, que ni la longueur de l'étincelle, ni la grandeur de la charge n'influent d'une façon appréciable sur la durée de l'oscillation; d'où il me semble ressortir nettement, que nous ne pouvons pas chercher dans l'étincelle l'origine du désaccord.

Je crois qu'on peut du moins avec certitude déduire de la théorie que les conditions particulières de l'étincelle ne peuvent produire aucune augmentation dans la durée d'une oscillation. Je ferai à cet égard remarquer que, si l'on considère que l'etincelle, après s'être éteinte, dans chaque oscillation individuelle, ne peut être produite de nouveau que par une certaine différence de potentiel à l'endroit de l'interruption, on trouvera la durée d'une oscillation *plus courte* au lieu de la trouver plus longue. De plus, si l'on tient compte des courants de disjonction d'Edlund, on introduira une correction dans le même sens.

Pas plus que par les expériences précitées sur la décharge, la théorie n'a été complètement confirmée par les expérience faites avec des câbles télégraphiques sur la vitesse de propagation de l'électricité. Le désaccord tient probablement à ce que les observateurs n'ont pas tenu compte, et en partie n'ont pas pu tenir compte, de toutes les circonstances dont dépend ici essentiellement la vitesse de propagation; mais il en résulte pourtant que nous chercherions vainement des démonstrations expérimentales de l'entière validité de la théorie dans tous les cas, où elle est appliquée aux mouvements très

rapides de l'électricité, dont il est ici question, tandis que les écarts constatés entretiennent comme une suspicion permanente à l'égard de toutes nos recherches théoriques sur l'électricité.

Ainsi se présente la question primordiale: Quel est le point à modifier dans la théorie admise jusqu'ici? La théorie revient, comme on sait, à admettre que la densité d'un courant en un point donné est proportionnelle à la force électromotrice en ce point. On suppose de plus que cette force provient de deux causes: à savoir de l'action distributive de l'électricité statique environnante et de l'action inductive des courants électriques et des aimants du voisinage. En ce qui concerne la première, les lois simples auxquelles elle est assujettie doivent être considérées comme établies avec certitude, surtout depuis qu'on a appris à tenir compte de l'action distributive différente produite par les éléments intérieurs conducteurs des corps isolants. En ce qui concerne les lois de l'induction, bien qu'on puisse avoir des doutes sur l'action particulière de chaque élément de courant, on ne considère en fait que l'action des courants fermés, et les lois de l'induction de tels courants doivent, au moins dans leurs traits essentiels, être considérées comme complétement fondées. Il est bien possible, que les lois aient besoin d'être modifiées et étendues, quand les courants considérés sont renversés avec une vitesse comparable à celle des vibrations de la lumière, à savoir des trillions de fois par seconde, et j'ai moi-même déjà cherché à introduire une telle modification*; mais elle est, au moins sous la forme, sous laquelle

* Overs. ov. Vidensk. Selsk. Forh. 1867, p. 1. Sixième mémoire du tome premier.

je l'ai introduite, sans influence appréciable même sur des courants qui sont renversés quelques millions de fois par seconde.

Mais si l'on doit considérer la théorie des forces inductrices, dont l'action est produite par un certain champ, comme admissible, au moins pour les cas considérés ici, il ne reste plus que la question de savoir si le mouvement de l'électricité ne dépend exclusivement que des forces agissant à distance, de manière que les variations du courant en un point donné ne puissent exercer aucune action électromotrice sur le point lui-même. Aussi bien cette question n'a pas été laissée en dehors de la science. W. Weber* et Lorberg** ont étudié en détail les conséquences de la supposition, que l'électricité soit douée de masse et d'inertie, ce qui introduit un terme indépendant des forces à distance dans les équations du mouvement de l'électricité. Nous ne ferons ici qu'admettre la possibilité de l'existence d'un tel terme dépendant des variations du courant au point considéré, sans avoir besoin d'examiner avec plus de précision les causes physiques auxquelles serait due son existence.

En formant les équations du mouvement de l'électricité dans les fils conducteurs, nous considérerons en premier lieu le cas, où l'intensité du courant dépend du temps, mais est en chaque instant la même dans tous les éléments du courant. Ce cas comprend, pour ainsi dire, toutes les expériences de laboratoire, ce qui résulte tant des expériences de Weber que des calculs de Kirchhoff. Ces calculs ont, dans la question présente, mani-

* Abh. der sächs. Ges. d. Wiss. IX. 1864. p. 573.

** Journal de Borchardt, t. 71, p. 53.

festé une bonne concordance entre les expériences et la théorie: comme exemple je citerai ce résultat, que la supposition admise n'amènerait, même pour 100000 oscillations par seconde pour un fil long de 100^m, qu'une erreur de $\frac{1}{25}$ pour cent sur la durée calculée d'une oscillation.

Dans le cas considéré, le mouvement de l'électricité sera déterminé par l'équation

$$ri = V - C\frac{di}{dt}, \tag{1}$$

où r est la résistance du fil conducteur, i l'intensité du courant, V la différence de potentiel électrostatique entre les deux bouts du fil et $-C\frac{di}{dt}$ la différence correspondante de potentiel électrodynamique produite par la variation du courant. Cette dernière est la somme de toutes les forces électromotrices qui ont pris naissance dans chaque élément du fil conducteur dans sa direction, en tant que ces forces sont produites, partie par la variation de courant qui a lieu dans l'élément lui-même, partie par la variation qui a lieu dans le reste du circuit. En ce qui concerne l'effet de la variation du courant dans l'élément lui-même, il ne peut dépendre que de la variation de la densité du courant, et pour cette raison il sera le même dans tous les éléments du fil. Du reste nous supposons, pour simplifier, que la force électromotrice produite par la variation du courant dans l'élément lui-même est, comme le reste des forces électromotrices induites, proportionnelle à la dérivée première de l'intensité du courant prise par rapport au temps. La constante C, *la constante électrodynamique*, sera donc une somme de deux

termes, dont l'un, que je nommerai *la constante d'induction*, et que je désignerai par C', dépend seulement des forces inductrices ordinaires agissant à distance et peut être calculé comme à l'ordinaire, tandis que l'autre peut être exprimé par $D\frac{l}{\sigma}$, où l est la longueur du fil, σ sa section normale et D une constante inconnue. On aura par conséquent

$$C = C' + D\frac{l}{\sigma}. \tag{2}$$

Une détermination de la constante électrodynamique d'un conducteur peut être obtenue par la mesure du courant extraordinaire produit dans le conducteur en fermant et en ouvrant un courant électrique. M. Edlund a le premier cherché à déterminer quantitativement les courants extraordinaires.* Plus tard Rijke** et plusieurs autres physiciens se sont occupés du même problème, sans qu'on ait pourtant réussi à obtenir par cette voie une détermination passablement exacte de la constante électrodynamique.

Pareillement, des déterminations plus indirectes, par exemple au moyen du développement de chaleur produit dans la décharge de bouteilles par des conducteurs ramifiés, n'ont pas donné de résultats satisfaisants. Ainsi nous trouvons, dans les longueurs équivalentes de Knochenhauer, qui peuvent être considérées comme une expression relative de la constante électrodynamique du conducteur, ainsi que l'a démontré Feddersen***, des écarts de 16 pour cent avec la théorie.****

---

* Pogg. Ann., t. LXXVII, p. 161.
** Pogg. Ann., t. CII, p. 481.
*** Pogg. Ann., t. CXXX, p. 439.
**** Pogg. Ann., t. CXLI, p. 596.

C'est pourquoi mes premiers efforts ont tendu à trouver une méthode par laquelle on pût déterminer la constante électrodynamique avec exactitude. Si l'on fait des expériences d'après la méthode de Wheatstone pour déterminer la résistance relative de deux fils conducteurs, on pourra parfois observer que le galvanomètre intercalé dans le pont, et qui n'indique aucune déviation pour un courant constant, indique des déviations opposées quand on ferme et ouvre le courant. Ces actions sur l'aiguille du galvanomètre sont produites par les courants extraordinaires qui prennent naissance dans les deux branches; elles ont servi à M. Herwig* pour observer les courants extraordinaires dans des barres de fer.

Les expériences peuvent être faites de manière à compenser l'influence des courants extraordinaires des deux branches; car on peut introduire dans la branche, pour laquelle le courant extraordinaire était le plus fort, une résistance plus grande, jusqu'à ce que le galvanomètre reste en repos quand on ferme et ouvre le circuit. Si le rapport des résistances des deux branches est alors comme m est à 1, le rapport des intensités des deux branches sera comme 1 est à m. Des courants différents produiront des courants extraordinaires à forces électromotrices égales; pour les mêmes intensités des courants, le rapport des forces électromotrices des courants extraordinaires sera par conséquent comme m est à 1; ce sera donc le rapport des constantes électrodynamiques. Il se produira aussi des courants extraordinaires dans les deux branches du fil à mesure, mais ils se compen-

---

* Pogg. Ann., t. CLIII, p. 115.

seront pareillement, le rapport des constantes électrodynamiques de ces deux branches étant égal, tout au moins avec une grande approximation, au rapport des branches, c'est-à-dire à $m : 1$.

Il y a pourtant un obstacle essentiel à l'exécution de mesures passablement exactes par cette méthode; car il n'est pas possible d'obtenir un galvanomètre assez sensible pour ce but. Mais si l'on intercale, au lieu d'un galvanomètre, un téléphone dans le pont, il sera possible d'observer à l'aide de ce téléphone les courants momentanés extraordinaires les plus faibles, s'il règne un silence parfait dans le local d'observation, et la méthode ne laisse rien à désirer comme simplicité et comme exactitude.

Pour toutes les mesures suivantes je me suis servi d'un téléphone à un fil court et épais. On a ôté la bobine d'un téléphone ordinaire, et elle a été remplacée par un fil de cuivre couvert d'une enveloppe, long de 3 à 4 mètres, épais de $0^{mm},8$, qui entourait le bout de l'aimant. Les bouts étaient en relation avec deux fils de cuivre soudés au fil à mesure.

Comme source de courant on s'est servi en général d'un seul élément de Léclanché, parfois d'un élément de Daniell; de cette manière le courant était toujours si faible qu'on n'avait à redouter aucune erreur provenant de l'échauffement du fil. L'un des pôles de l'élément fut donc relié aux deux fils conducteurs, dont on voulait comparer les constantes électrodynamiques, et ces deux conducteurs aboutissaient aux deux bouts du fil à mesure, un fil d'argenton long de $0^{m},8$, épais de $0^{mm},5$. Dans l'un des deux conducteurs on a encore

intercalé un fil d'argenton, épais de $0^{mm},25$, qui pouvait à volonté être rendu plus long ou plus court.

Le téléphone, relié avec le fil à mesure, était approché de l'oreille pendant qu'on amenait un fil, que je nommerai *le fil à sonder*, relié à l'autre pôle de l'élément galvanique, sur le fil à mesure. Parfois on a aussi, pour mieux s'orienter, intercalé dans le pont, un galvanomètre à côté du téléphone.

Quand la différence des constantes électrodynamiques des deux conducteurs était considérable, on entendait un grand bruit à tout mouvement du fil à sonder sur le fil à mesure, et souvent on ne pouvait pas même percevoir un minimum à l'endroit où le galvanomètre n'indiquait aucune déviation. Quand on eut augmenté la résistance dans la branche, où le courant extraordinaire était le plus fort, en allongeant ici le fil mince d'argenton intercalé, un minimum distinct fut bientôt perçu, et successivement ce minimum de bruit s'est transformé en un silence complet par l'effet d'un allongement continu du fil intercalé. Ce point mort du fil à mesure, où un contact du fil à sonder (surtout par sa pointe) ne produit aucun bruit dans le téléphone, est très caractéristique et très distinct. Ce point une fois trouvé, on obtiendra le rapport des constantes électrodynamiques des deux conducteurs, y compris le fil d'argenton intercalé, par le rapport des distances du point mort aux points du fil à mesure qui sont reliés au téléphone. Plusieurs expériences préliminaires faites à différentes époques avec les mêmes conducteurs ont donné des résultats qui ne différaient entre eux que d'une fraction d'un pour cent.

La même méthode peut aussi fournir la détermination de la constante électrodynamique en mesures absolues,

si l'on suppose que les actions inductrices qu'exercent deux conducteurs l'un sur l'autre, (ce qui revient à tenir seulement compte des forces à distance), peuvent être calculées par la théorie ordinaire. On peut par exemple constituer l'un des deux conducteurs avec deux bobines placées tout près l'une de l'autre et faire deux expériences, de manière que la direction du courant dans une des bobines soit dans la première expérience opposée à la direction, qu'il a dans l'autre, tout le reste du dispositif étant le même dans les deux expériences. Si l'on a calculé en mesures absolues la constante électrodynamique correspondante à l'action mutuelle des deux bobines, les dites expériences donneront les constantes électrodynamiques des deux branches en mesures absolues.

Dans les expériences avec des fils suspendus, il importe beaucoup d'éviter autant que possible l'influence inductrice des corps environnants, parce qu'elle est difficile à calculer. A ce point de vue, j'ai pu disposer d'un local qui était très propre à l'installation des fils.

A côté du cabinet de physique de l'école militaire, au château de Frederiksberg, est située la vieille chapelle, dans laquelle est installée la bibliothèque. C'est là que les fils ont été tendus à une hauteur de $4^m,8$ au-dessus du sol entre deux tribunes. La distance des fils au plafond était de $3^m,3$, le local était large de $7^m,5$.

Les fils étaient suspendus sur des clous isolés par de tubes de verre vernissé ou par de tubes de caoutchouc; ils allaient et revenaient de l'appui d'une tribune à celui de l'autre (distance $15^m,334$). Le premier fil était de cuivre habillé, épais de $0^{mm},5$; il faisait 5 fois le double parcours entre les deux appuis. Les fils étaient toujours

parallèles et la distance entre deux fils successifs était d'un décimètre. Le premier cinquième de ce fil sera désigné par le n^ro 1, le fil total par le n^ro 2. Le fil suivant (n^ro 3) était un fil de cuivre, à double enveloppe, épais de 1^{mm} et faisait une fois le double parcours. Le fil suivant, non enveloppé était de cuivre, épais de $1^{mm},9$ et faisait 4 fois le double parcours. La premier quart de ce fil sera désigné par le n^ro 4, le fil total par le n^ro 5. Les fils suivants étaient des fils de fer, qui seront mentionnés plus tard en détail. Les constantes électrodynamiques de ces fils seront désignées par (1), (2), (3), (4), (5).

De plus j'avais deux bobines de fils enroulés sur des cylindres de verre. L'une était composée d'un fil de cuivre, épais de 1^{mm}, long de $24^{m},77$, qu'entourait le cylindre d'une seule couche de 96 tours. La hauteur de la bobine à partir des extrémités des tours était de 121^{mm}. Les bouts du fil, longs de $1^{m},65$, étaient ramenés au milieu du cylindre et de là conduits ensemble plus loin. L'autre bobine était composée d'un fil de cuivre recouvert de caoutchouc, épais de $1^{mm},3$. La longueur du fil enroulé était de $20^{m},562$, le nombre de tours 76, la hauteur 216^{mm}. Les bouts du fil, longs de $0^{m},77$ étaient placés comme pour la première bobine. Les constantes électrodynamiques des deux bobines seront désignées par (A) et (B).

Pour le calcul des constantes d'induction de ces conducteurs, je suis parti de ce que la constante d'induction correspondante à l'action inductrice mutuelle de deux éléments d'un courant est pour chaque élément en particulier $\frac{dsds'}{r}\cos\varepsilon$, ds et ds' désignant les longueurs des éléments, r leur distance et ε l'angle qu'ils font entre eux.

Pour un fil de rayon a, qui va et revient m fois en tours parallèles, qui ont pour longueur l et pour distance d, la constante d'induction calculée de cette ma-
* NOTE 2. nière sera *

$$C' = 4l\left[m\left(\log\frac{d}{a}+\frac{3}{4}\right)-(2m-2)\log 2+(2m-3)\log 3-\ldots\right]$$
$$+2d(2m-1)\left(\log\frac{2d}{a}-\frac{1}{4}\right)+\frac{d}{2}\left(\frac{m-1}{1}+\frac{m-2}{2}+\ldots\right)$$
$$+\frac{d}{2}\left(\frac{m-2}{1}+\frac{m-3}{2}+\ldots\right)+\ldots.$$

Dans cette évaluation on a tenu compte même des petites parties du fil qui alternativement aux deux extrémités réunissent les longs fils parallèles.

Pour le calcul de la constante d'induction d'une bobine à une seule couche de tours, j'ai effectué une intégration au lieu d'une sommation; je suis ainsi parvenu
* NOTE 3. à la formule *

$$C' = \frac{32\pi r^3}{3a^2}\left[-1+\frac{2c^2-1}{c^3}E+\frac{1-c^2}{c^3}K\right],$$

plus facile à employer que la formule de sommation de Kirchhoff. Ici r désigne le rayon des tours, a la distance de deux tours successifs déduite par division de la hauteur totale de la bobine comptée à partir des extrémités par le nombre des tours. De plus on a posé

$$c^2 = \frac{4r^2}{h^2+4r^2},$$

tandis que K et E représentent les expressions bien connues des intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce, à module c.

Pareillement j'ai calculé la constante d'induction correspondante à l'action inductrice mutuelle de deux bobines pour le cas, où l'axe de l'une est situé dans le prolongement de l'axe de l'autre et où leurs rayons ne diffèrent que peu. La formule trouvée est* * NOTE 4.

$$C' = \frac{128\pi r^2 r'^2 \sqrt{rr'}}{3aa'(r+r')^2} S\left[\frac{3\pi(r'-r)\sqrt{1-c^2}}{-2(r'+r)c} + \frac{2c^2-1}{c^3}E + \frac{1-c^2}{c^3}K\right],$$

où r et r' sont les rayons des tours, a et a' leurs distances, et où S désigne la somme des quatre valeurs différentes que prend le terme entre parenthèses, quand l'on égale c^2 successivement à

$$\frac{4rr'}{d^2+(r+r')^2}, \quad \frac{4rr'}{(d+h+h')^2+(r+r')^2},$$
$$\frac{4rr'}{(d+h)^2+(r+r')^2}, \quad \frac{4rr'}{(d+h')^2+(r+r')^2},$$

les expressions correspondantes aux deux dernières valeurs de c^2 étant prises avec le signe négatif. De plus h et h' désignent les hauteurs des deux bobines et d leur plus conrte distance. Si dans l'expression ci-dessus on fait $r' = r$, $h' = h$ et $d = -h$, on obtiendra la valeur doublée de la constante d'induction correspondante à une seule bobine, qu'on a calculée précédemment.

Dans les expériences, où l'on a introduit les deux bobines réunies, la bobine (A) a été placée au-dessus de la bobine (B), de manière que les axes des deux bobines étaient situés sur la même ligne droite, et que leur distance minimum était de 48^{mm}. On avait donc ici en millimètres

$$r = 41{,}06, \quad r' = 43{,}07, \quad h = 121, \quad h' = 216, \quad d = 48,$$
$$a = 1{,}260, \quad a' = 2{,}842.$$

La constante d'induction relative de ces deux bobines sera désignée par (A, B). Les constantes d'induction des différents conducteurs calculées numériquement
* NOTE 5. d'après les formules indiquées sont: *

$$(1) = 414^{m},8, \quad (2) = 1992^{m},9, \quad (3) = 372^{m},1,$$
$$(4) = 332^{m},6, \quad (5) = 1271^{m},4,$$
$$(A) = 3880^{m}, \quad (B) = 1666^{m}, \quad (A, B) = 166^{m},4.$$

Outre les conducteurs mentionnés, on s'est servi dans les expériences de pièces de fil plus petites, dont les constantes d'induction provaient être indiquées avec une approximation suffisante par estimation. J'ai ainsi évalué les constantes des fils plus épais à 10 fois leurs longueurs, pour le fil mince d'argenton à 15 fois la longueur, et pour les deux fils de cuivre situés l'un près de l'autre, qui étaient en relation avec les bobines, à 5 fois la longueur, le tout évalué en mètres.

Les constantes d'induction des petites pièces de fil intercalées sont ci-dessous partout indiquées à côté des constantes des conducteurs eux-mêmes.

Les premières expériences, qui ont eu pour objet une comparaison des constantes électrodynamiques des fils suspendus, ont tout de suite mis en évidence une concordance presque complète entre les expériences et les calculs. Les résultats des expériences étaient:

* NOTE 6.
$$\frac{(1)+4}{(3)+17} = 1{,}083 \text{ (calc.: } 1{,}076),*$$
$$\frac{(2)+6}{(3)+17} = 5{,}137 \text{ (calc.: } 5{,}137),$$
$$\frac{(3)+8}{(5)+18{,}5} = 0{,}292 \text{ (calc.: } 0{,}295),$$
$$\frac{(3)+6}{(4)+6} = 1{,}108 \text{ (calc.: } 1{,}117).$$

Les écarts des valeurs observées et calculées montent en moyenne à 0,6 pour cent, et sont compris entre les limites des erreurs d'expérience. Une comparaison entre les bobines et le fil n^ro 5 a donné le résultat suivant:

$$\frac{(A)+37{,}2}{(5)+6{,}2} = 3{,}233 \text{ (calc.: } 3{,}067),$$

$$\frac{(B)+17{,}2}{(5)+6{,}2} = 1{,}391 \text{ (calc.: } 1{,}318).$$

Ici les deux rapports observés sont de 5 et 6 pour cent plus grands que les rapports calculés; les écarts excédent donc de beaucoup les limites des erreurs d'observation.

Enfin on a comparé le fil n^ro 5 avec les deux bobines réunies, placées comme on l'a indiqué ci-dessus, l'une au-dessus de l'autre, le courant passant dans la première expérience dans la même direction par les deux bobines, tandis que dans l'autre expérience il a été commuté dans l'une des bobines. Ces expériences, qui ont été exécutées avec grand soin, pour réduire les erreurs d'observation au minimum, ont donné

$$\frac{(A)+(B)+(A,B)+55{,}4}{(5)+6{,}2} = 4{,}776,$$

$$\frac{(A)+(B)-(A,B)+54{,}4}{(5)+6{,}2} = 4{,}490.$$

Si l'on introduit ici la valeur de $(A.B)$, soit $166^m{,}4$, on obtiendra

$$(A)+(B) = 5352^m \text{ (calc.: } 5546),$$

$$(5) = 1162^m \text{ (calc.: } 1271). *$$

* NOTE 7.

Comme les erreurs des observations particulières se présentent ici considérablement augmentées, on doit con-

sidérer le résultat comme assez satisfaisant en ce qui concerne les bobines, et si l'on introduit dans les résultats des expériences les valeurs calculées de (A) et (B), qu'on doit à présent considérer comme les valeurs les plus exactes, les deux expériences donneront (5) = 1204 et 1201,5, dont la moyenne est 1203 (calc.: 1271). Les expériences donnent par conséquent aussi dans ce cas des écarts de 5 à 6 pour cent; c'est pourquoi les constantes calculées des fils suspendus doivent être diminuées de 5 à 6 pour cent.

Ces écarts peuvent, en ce qui concerne les fils suspendus, être expliqués d'une manière satisfaisante par la réaction inductrice des corps enviromants qui doit précisément diminuer les constantes de ces fils. On doit par conséquent considérer les résultats des expériences comme d'accord avec la théorie.

Il y a pourtant encore une éventualité, dont nous sommes obligés de tenir compte. Les expériences sont faites de manière que les constantes électrodynamiques des deux conducteurs qui doivent être comparés soient précisément proportionnelles à leurs résistances de conduction. Si l'on désigne les deux constantes par C et C_1, et les résistances de conduction par r et r_1, l'expérience fait ressortir la valeur du rapport

$$m = \frac{r}{r_1} = \frac{C}{C_1},$$

qui peut aussi être écrit sous la forme

$$m = \frac{C + A r}{C_1 + A r_1},$$

A étant un facteur arbitraire. Par conséquent, si la constante électrodynamique d'un conducteur contient un

terme proportionnel à la résistance de conduction, ce terme, quelque grand qu'il soit, ne peut être décelé par notre procédé. La question énoncée plus haut (p. 189) et exprimée avec plus de précision dans l'équation (2) (p. 190) n'est donc pas complètement tranchée par les expériences faites jusqu'ici; mais les résultats des expériences font pourtant ressortir avec une grande vraisemblance, que la constante D de l'équation (2) doit, si elle diffère en général de zéro être proportionnelle pour les différents métaux (cuivre, argenton) à leur résistance de conduction spécifique.

Il était naturel de rechercher, si l'on obtiendrait les mêmes résultats en remplaçant le fil mince d'argenton, dont on s'était servi pour produire la résistance nécessaire, par un rhéostat à liquide.

J'ai employé une auge contenant une solution concentrée de sulfate de cuivre, dans laquelle on avait mis comme électrodes des plaques de cuivre. On n'a pas tardé à reconnaître que les expériences ne pouvaient être exécutées de cette manière, parce qu'on ne pouvait réduire l'action sur le téléphone qu'à un certain minimum. Il ne se produisait aucun „point mort", de manière qu'on ne pouvait pas obtenir une coïncidence complète des courants extraordinaires dans les deux conducteurs. Si l'on tient compte du point minimum observé, le rhéostat avait pour effet de diminuer la constante électrodynamique, ce qui pouvait être le résultat de la polarisation de l'électrode par l'interruption du courant; car l'action de la polarisation est opposée à celle du courant extraordinaire. On observa en même temps qu'un multiplicateur, intercalé à côté du téléphone, indiquait une

déviation pour le point minimum du téléphone, et que cette déviation était produite par un excès de la branche du rhéostat à liquide.

Comme il était évident que la polarisation pouvait troubler gravement les expériences, j'ai de plus recherché, si une pareille perturbation pouvait être produite par un courant thermoélectrique. On a observé que cela n'était pas le cas, au moins pour les courants faibles dont je me suis servi. J'ai même pu intercaler toute une pile d'éléments thermoélectriques sans produire aucune perturbation dans les résultats des expériences.

Une autre méthode pour la détermination de la constante électrodynamique procède des expériences de Feddersen, sur les décharges des bouteilles. Il y avait d'autant plus lieu de répéter ces expériences, que c'était la seule manière de découvrir les causes des écarts entre la théorie et les résultats trouvés par Feddersen. Je n'ai pourtant pas jugé nécessaire d'assumer la lourde tâche de répéter toute la suite d'expériences si admirablement exécutées par Feddersen, car j'ai pensé que quelques mesures exactes et bien faites suffiraient pour le but en vue.

Au moyen d'un appareil de rotation, actionné par une manivelle et qui était placé sur un socle isolé, on a fait tourner très vite, grâce à un engrenage de roues, un miroir plan d'acier dont le diamètre était de 27^{mm}. A chaque tour de la manivelle correspondaient $468\frac{3}{4}$ rotations du miroir, et l'on pouvait facilement obtenir de 100 à 200 rotations du miroir par seconde; les expériences ont été faites avec des vitesses comprises entre ces limites. Pour pouvoir déterminer la vitesse de rotation, on avait fixé sur l'axe de la manivelle un disque de

laiton, dont le diamètre était de 210^{mm}, qui fut recouvert de collodion et noirci par une flamme de pétrole. Un diapason pourvu d'une pointe de laiton, qui faisait 226 vibrations complètes par seconde, était placé sur un socle solide et isolé, en position horizontale en face du disque, de manière que sa pointe fût pressée contre la surface noircie par la fumée. Quand fut retirée la pince qui maintenait les branches du diapason, la pointe du diapason a dessiné une ligne sinueuse sur le disque tournant.

La face postérieure du miroir tournant portait une branche courte à laquelle était soudé un fil de métal mince et court. Tous deux étaient recouverts de gomme laque à l'exception de la pointe du fil. Pour une position déterminée du miroir cette pointe du fil se trouva en face de l'orifice d'un tube de verre, dans laquelle était noyé au moyen de gomme laque un fil de cuivre rétiré de quelques millimètres.

Comme accumulateur électrique on s'est servi d'une batterie de 9 bouteilles de Leyde, qui fut chargée à l'aide d'une machine de Holz. On a fait commencer la décharge en approchant un fil terminé en boule de l'armature intérieure de la batterie et ce mouvement a été exécuté peu de temps après avoir fait vibrer le diapason, ce qu'on a fait en étendant un doigt de la main qui faisait fonctionner l'appareil de rotation. Le fil conducteur allait de l'armature intérieure de la batterie au fil de cuivre noyé, comme nous l'avons dit ci-dessus, dans un tube de verre; et de là, au moment où la pointe placée derrière le miroir se trouvait en face de l'orificé du tube, la décharge passait sur le miroir et, par l'appareil de rotation et par la pellicule, sur le diapason.

De là, un conducteur court allait à un déchargeur fixe, composé de deux petites boules de cuivre ou d'étain, recouvertes de gomme laque, à l'exception de deux petites taches, et placées à une distance horizontale d'environ 5^{mm} l'une en face de l'autre.

De ce déchargeur l'électricité repassait enfin par un des fils conducteurs mentionnés ci-dessus à l'armature extérieure de la batterie.

Dans l'espace intermédiaire entre le déchargeur fixe et le miroir tournant, on avait placé un appareil de lentilles photographiques, par lequel les rayons de l'étincelle ont été recueillies de manière que tout le faisceau fût recueilli par le miroir et, de là, réfléchi sur une plaque photographique placée un peu au dessus du déchargeur, sur laquelle se formait une image un peu agrandie de l'étincelle. Les plaques employées étaient à pellicule de gélatine, sèches et très sensibles.

Les images photographiques obtenues avec les fils conducteurs courts étaient indistinctes; au contraire j'ai réussi à obtenir, avec les fils conducteurs longs, trois images dans lesquelles les raies équidistantes, correspondantes aux oscillations successives et produites par la décharge oscillatoire, étaient assez distinctes, pour qu'on pût mesurer leurs distances. La vitesse de rotation du miroir fut, après la décharge, mesurée au moyen de la ligne sinueuse décrite par la pointe du diapason sur le disque de laiton noirci, car j'avais placé sur le disque un secteur concentrique de papier de 20° d'ouverture, qui avait une fente par laquelle on pouvait voir la marque de l'étincelle; j'avais aussi marqué les points d'intersection du secteur et de la ligne d'ondulation par deux

traits au crayon. Puis on a compté le nombre des vibrations du diapason entre les deux marques.

Si r est la distance du miroir à la plaque photographique, l'image formée sur la plaque se mouvra avec une vitesse correspondante au chemin $4\pi r$ pour chaque rotation du miroir. Si le miroir fait n rotations par seconde, l'image aura dans le temps T parcouru le chemin

$$b = 4\pi r n T.$$

Par conséquent, si T est la durée d'une oscillation de l'étincelle, b sera la distance des raies de l'image photographique.

Si de plus m est le nombre de vibrations complètes, qu'a décrites le diapason entre les deux marques de crayon, comme la distance angulaire de ces deux marques est 20°, et comme le diapason fait 226 oscillations complètes par seconde, on aura

$$n = 468\tfrac{3}{4} \cdot \frac{226}{18\,m}.$$

De ces deux équations, où l'on connaît r qui est égal à $455^{mm},7$, on déduira

$$T = 0{,}02967 \cdot 10^{-6} mb.$$

Ici b doit être exprimé en millimètres.

Dans l'une des expériences on avait intercalé tout le conducteur de fil mentionné ci-dessus, à savoir les conducteurs n^ros^ 2, 3 et 5 et de plus un fil de cuivre entouré de caoutchouc, qui allait des conducteurs longs au local contigu et sombre, où les expériences ont été faites. En comparant ce fil qui sera désigné par n° 0, avec un

des fils longs, on a trouvé expérimentalement que sa constante électrodynamique était $(0) = 216^{m},8$.

L'image photographique a fait voir cinq raies minces équidistantes. La distance des raies extrêmes était $26^{mm},2$, d'où l'on déduit $b = 6,55$. De plus on a trouvé $m = 42$. On conclut de là, que la durée d'une oscillation, exprimée en secondes, était

$$T = 8,16 \cdot 10^{-6}$$

pour les conducteurs n°s 0, 2, 3, 5.

Les deux autres expériences ont été exécutées avec les conducteurs n° 2 et n° 0 pris séparément. Ici on pouvait apercevoir respectivement 4 et 5 raies minces équidistantes. Les distances des raies étaient $5^{mm},67$ correspondant à $m = 38,5$ et $5^{mm},65$ à $m = 36,7$. On obtient comme moyenne

$$T = 6,32 \cdot 10^{-6} \text{ pour les conducteurs n}^{os} \text{ 0 et 2.}$$

En ce qui concerne la détermination théorique de la durée d'une oscillation, je pourrais renvoyer au mémoire de Kirchhoff; mais, comme le calcul est très simple dans les cas correspondants aux expériences, je le reproduirai ici en le résumant. Nous introduirons dès le commencement la supposition. rendue plausible par le calcul même de Kirchhoff, que la résistance du conducteur n'influe pas d'une manière appréciable sur la durée d'une oscillation. L'équation (1) pag. 189, donne en égalant r à zéro,

$$V = C\frac{di}{dt}.$$

Ajoutez à cela que la différence de potentiel des deux extrémités du conducteur, armatures intérieure et

extérieure de la batterie, peut être déterminée par

$$\beta V = a^2 Q,$$

ou Q est la „charge disponible“ de la pile et β sa „capacité“, ou la charge disponible correspondant à la différence potentielle 1, toutes les deux mesurées en mesures mécaniques. Si nous nous étions servis de ces mesures dans les calculs, la constante a, qui entre dans l'équation ci-dessus, serait égale à 1; mais comme nous nous sommes servis des mesures électromagnétiques, on doit, comme on sait, considérer cette constante comme une quantité qui est à peu près égale à la vitesse de la lumière, soit

$$a = 300 \cdot 10^6 \text{ mètres.}$$

Enfin une perte de charge disponible $-dQ$ correspondra pendant la durée de la décharge à une augmentation égale de la quantité d'électricité qui se trouve dans le conducteur sons forme de courant. Par conséquent on aura

$$-\frac{dQ}{dt} = i.$$

Des trois équations que nous venons d'établir on tirera, par élimination de Q et V, l'équation différentielle

$$a^2 i + \beta C \frac{d^2 i}{dt^2} = 0,$$

dont l'intégrale a la forme

$$i = A \cos \pi \frac{t}{T} + B \sin \pi \frac{t}{T},$$

où

$$T = \frac{\pi}{a} \sqrt{\beta C}. \qquad (3)$$

Telle est donc la durée calculée d'une oscillation. Comme on le voit, cette expression dépend de la constante électrodynamique C et en outre de la capacité β de la pile. Reste encore à déterminer cette quantité.

Cette détermination a été exécuté, par comparaison de la pile avec deux grands condensateurs de formes simples. L'un était composé de deux cylindres hauts de $0^{m},997$ et formés de lames de zinc épaisses de $1^{mm},3$. Ils étaient placés verticalement sur des supports de gomme laque l'un à l'intérieur de l'autre et concentriquement avec lui. La circonférence du cylindre extérieur mesurée sur la surface intérieure était $1^{m},253$, la circonférence du cylindre intérieur mesurée sur la surface extérieure était $1^{m},105$.

Si l'on calcule la capacité de ce condensateur, que nous désignerons par β_1, au moyen de la formule

$$\beta_1 = \frac{h}{2 \log \alpha},$$

où h est la hauteur des cylindres, et α le rapport de leurs circonférences, on trouvera

* NOTE 8. $$\beta_1 = 3^{m},983. \text{ *}$$

La formule employée suppose pourtant que la distance des cylindres puisse être considérée comme infiniment petite en comparaison de leur hauteur. En réalité la capacité doit être considérablement plus grande.

L'autre condensateur était formé par deux plaques circulaires d'acier Bessemer, dont le diamètre était de $1^{m},471$, et l'épaisseur de $6^{mm},5$. Elles étaient placées horizontalement et l'inférieure reposait sur un support de bois.

La plaque supérieure reposait sur six cylindres de verre, hauts de $52^{mm},6$, placés sur la plaque inférieure.

Si l'on calcule sa capacité, que nous désignerons par β_2, par la formule

$$\beta_2 = \frac{R^2}{4e},$$

où R est le rayon des plaques, e leur distance, on obtiendra

$$\beta_2 = 2^{m},571.$$

Ce résultat est aussi beaucoup trop petit. Il n'existe pas de solution complète de ce problème sur les condensateurs; mais Kirchhoff a dans les „Berichte der Berliner Akademie“ pour 1877 déterminé la correction qu'il faut ajouter à la formule citée ci-dessus, dans le cas où la distance et l'épaisseur des plaques peuvent être considérées comme infiniment petites en comparaison de leur rayon. D'après cette formule on trouverait $\beta_2 = 2^{m},92$, valeur de près de 14 pour cent plus grande. Comme la correction peut acquérir une si grande valeur, alors qu'on suppose dans les calculs qu'elle est infiniment petite, on peut douter de sa légitimité; et, comme on n'est pas sûr que la valeur corrigée soit plus près de la réalité que la valeur non corrigée, je préfère me servir de la dernière, dont on sait au moins avec certitude qu'elle est trop petite. Si l'on adopte un écartement plus petit pour les plaques du condensateur, ce que j'ai du reste essayé, on introduira de nouvelles erreurs, en partie à cause de la difficulté de l'isolation, en partie parce que les petites erreurs inévitables faites sur les distances auront alors une trop grande influence.

Pour faire en premier lieu la comparaison des 9 bouteilles, dont se composait ma batterie, je les ai chargées en combinaison l'une avec l'autre et puis déchargées chacune séparément au moyen d'un galvanomètre à miroir

à tours nombreux, où l'on avait de plus intercalé un tube rempli d'eau. Les capacités étaient alors proportionelles aux déviations du galvanomètre observées avec la lunette. Les bouteilles ont été reconnues presque égales à l'exception de deux, dont les capacités étaient d'environ 20 pour cent plus grandes que celle des autres. La capacité de la batterie entière était 9,37 fois plus grande que la capacité de la bouteille que j'avais choisie pour faire la comparaison avec les conducteurs mentionnés.

Pour faire la comparaison, je me suis servi d'un électromètre à torsion, dont la barre horizontale et mobile était mise par le fil de suspension en communication avec la barre fixe. De cette manière les deux barres étaient toujours chargées au même potentiel. Pour les mesures on a, au moyen d'un bouton isolé, fait tourner le point de suspension du fil tordu de manière à réduire la déviation à un angle constant de 20°, et puis on a lu l'angle du torsion sur un cercle divisé placé au dessus. On a mis l'armature intérieure de la bouteille de Leyde en relation avec l'électromètre dont l'armature extérieure, comme le cylindre extérieur du condensateur cylindrique et la plaque inférieure du condensateur à plaques, étaient en communication, tant avec le conduit de gaz qu'avec celui d'eau.

Pour les expériences, la bouteille a été chargée d'électricité, l'angle de torsion de l'électromètre a été déterminé; puis la bouteille a été partiellement déchargée au condensateur, et on a de nouveau déterminé l'angle de torsion. Trois expériences faites avec le condensateur cylindrique ont donné les rapports suivants des angles de torsion observés:

$\frac{55}{38} = 1{,}45$, $\frac{78}{53} = 1{,}47$, $\frac{74}{50} = 1{,}48$, moyenne 1,466.

Le potentiel de la bouteille et de l'électromètre est donc réduit par la décharge de $\sqrt{1,466} = 1,211$ à 1, d'où résulte que le rapport de la capacité de la bouteille (les capacités de l'électromètre et du fil conducteur étant tellement petites qu'elles peuvent être négligées) à celle du condensateur était 1:0,211. Si la capacité de la bouteille est désignée par K, on aura par suite, en employant la valeur de β_1 indiquée ci-dessus,

$$K = 18^m,88.$$

Pareillement on a fait la comparaison des capacités de la même bouteille et du condensateur à plaques, avec cette différence pourtant qu'ici l'on a décharge trois fois la bouteille au condensateur par trois décharges successives. Le potentiel diminua par ce procédé de 1,466 à 1, ou par chaque décharge de $\sqrt[3]{1,466} = 1,136$ à 1. En employant la valeur calculée de la capacité du condensateur à plaques, on trouvera

$$K = 18^m,90;$$

mais il faut remarquer, qu'on doit admettre que les deux valeurs trouvées sont considérablement trop petites, à cause du calcul incomplet des capacités des deux condensateurs, et que les corrections seraient vraisemblablement différentes dans les deux cas.

La capacité totale de la pile sera par conséquent un peu plus grande que

$$9.37 \cdot 18^m,89 = 177^m,0.$$

Si l'on introduit cette valeur de β dans l'équation (3), et si de plus, en employant les notations antérieures, on pose $C = (0) + (2) + (3) + (5)$, où $(0) = 216^m,8$, et où

les trois autres constantes ont les valeurs calculées ci-dessus, en soustrayant pourtant 5,5 pour cent, on obtiendra $C = 3653^{m}$ et

$$T = 8{,}42 \cdot 10^{-6} \text{ (obs.: } 8{,}16 \cdot 10^{-6}).$$

Aux deux autres observations de la durée d'une oscillation correspond $C = (0) + (2) = 2100^{m}$, et, si l'on introduit cette valeur dans l'équation (3), on obtiendra

$$T = 6{,}38 \cdot 10^{-6} \text{ (obs. } 6{,}32 \cdot 10^{-6}).$$

Comme on le voit, il y à une bonne concordance entre les observations et la théorie; il faut pourtant remarquer, que cette concordance est un peu plus petite en réalité qu'en apparence; car la capacité de la batterie est assurément plus grande que celle que nous avons admise. En fait, la durée observée d'une oscillation est un peu plus petite que la durée calculée, résultat qui est précisement contraire à celui qui résulte du calcul des expériences de Feddersen, fait par Kirchhoff. Mais on en peut conclure, qu'il n'y a pas de raison d'admettre que l'électricité ait de l'inertie, ni d'attacher de l'importance au terme hypothétique de l'équation (2). Ce que nous avons nommé la constante d'induction devient donc identique à la constante électrodynamique, et cette constante ne dépend, conformément à la théorie admise jusqu'ici, que des forces à distance.

Si nous attachons quelque importance aux écarts constatés, on doit plutôt en chercher l'explication dans l'étincelle elle-même qui, comme je l'ai dit au commencement de ce mémoire, produit vraisemblablement une diminution de la durée d'une oscillation, à raison des circonstances particulières qui accompagnent la formation de l'étincelle.

A présent, on peut sans difficulté reconnaître l'origine de l'erreur faite dans le calcul des expériences de Feddersen. Feddersen n'avait pas calculé lui-même la capacité de sa batterie, et Kirchhoff l'a calculée en supposant d'après une indication de Siemens que la puissance distributive (la constante de diélectricité) du verre était égale à 2. En fait ce nombre est trop petit. Une de mes bouteilles de Leyde s'étant brisée par accident, j'ai eu l'occasion de faire de nombreuses mesures sur les épaisseurs du verre à différents endroits. Elle était en moyenne de $2^{mm},30$ pour les parois et de $7^{mm},4$ pour le fond. La hauteur de l'armature intérieure était 232^{mm} et son diamètre 107^{mm}. On en déduit, en désignant par μ la puissance distributive du verre, que la capacité du fond était $0^{m},0967\,\mu$ et que la capacité de la partie cylindrique était $2^{m},756\,\mu$, en tout $2^{m},853\,\mu$.

Par les mesures précédentes on a reconnu que la capacité de cette bouteille surpassait de 3 pour cent celle de la bouteille dont on s'est servi pour faire les mesures mentionnées. On obtiendra ainsi

$$2,853\,\mu = 19,46$$

et

$$\mu = 6,82.$$

En réalité, la puissance distributive est encore un peu plus grande. Ainsi l'erreur commise dans le calcul des expériences de Feddersen tient à la détermination de μ; si l'on multiplie cette constante par 3,41, la durée calculée d'une oscillation est multipliée par $\sqrt{3,41} = 1,85$ et s'accorde avec l'observation.

Ajoutons que d'autres observateurs ont trouvé pour le verre une puissance distributive très grande. Ainsi

Wüllner* indique pour le verre 6,10, Hopkinson** pour le flint de 6,57 à 10,1, Schiller*** pour le verre demi-blanc 2,96 à 3,66 et pour le verre à glace blanc de 5,78 à 6,34. Enfin on trouve dans le mémoire même de Siemens****, où la puissance distributive du verre est indiquée comme voisine de 2, une expérience d'où l'on peut déduire un résultat tout différent.

Un fil de fer épais de deux lignes anglaises, long de $120^m,85$, était isolé et suspendu à 8^m au-dessus du sol. Sa capacité fut comparée avec celle d'une plaque de verre épaisse de 1^{mm} à armature de 2,25 décimètres carrés, et on a trouvé le rapport 2138:2948.

Si l'on calcule la puissance distributive du verre par cette expérience, on obtiendra 5,21.

Outre les déterminations des constantes électrodynamiques mentionnées ci-dessus, j'ai encore exécuté quelques mesures des constantes électrodynamiques des fils de fer. Un fil de fer galvanisé, épais de $2^{mm},2$, était suspendu à côté des fils de cuivre et allait deux fois d'une tribune à l'autre. Il fut comparé avec un des fils de cuivre, ce qui montra qu'on ne pouvait pas faire coïncider les deux courants extraordinaires des deux fils; on a pourtant observé un minimum distinct; d'où résulterait pour la constante électrodynamique du fil de fer une valeur près de 6 fois plus grande que celle du fil de cuivre n° 4 qui était de la même longueur et un peu moins épais. Par comparaison avec la bobine (*B*) on a obtenu une valeur correspondante, savoir 2080^m. On

---

*) Wiedemann Ann., t. 1, p. 401.
**) Proc. Roy. Soc. 26, p. 298.
***) Pogg. Ann. t. CLII, p. 557.
****) Pogg. Ann. t. CII, p. 66.

a obtenu à peu près le même résultat avec un autre fil de même longueur, mais plus mince (épais de 1^{mm}). On a opéré avec plus de précision en comparant les deux fils de fer entre eux; sans avoir pu pourtant faire coïncider complètement les deux courants, on a trouvé que la constante du fil plus mince (et plus mou) était 1,13 fois plus grande que celle de l'autre fil.

Le fait que les courants extraordinaires sont considérablement augmentés dans les fils de fer est bien connu, surtout après les recherches de Villari sur ce sujet; il est mentionné dans „Die Lehre vom Galvanismus" de Wiedemann (t. II, p. 55). Herwig* a étudié avec plus de précision les courants extraordinaires dans les barres de fer à l'aide du dispositif de Wheatstone avec un galvanomètre dans le pont et il a déduit de ses expériences ce résultat, que les courants extraordinaires dans des barres d'épaisseur variable étaient entre eux comme les carrés de leurs sections droites. Ce résultat est en contradiction avec celui que j'ai trouvé ci-dessus; mais l'emploi de barres aussi courtes ($1^m,6$ et $1^m,7$) et d'un appareil insuffisamment sensible comme le galvanomètre, ne peut donner, pour de telles mesures, que des résultats très incertains.

Herwig et G. Wiedemann s'accordent pour expliquer la grande intensité du courant extraordinaire par le magnétisme transversal et annulaire produit dans un fil de fer, quand un courant électrique le parcourt; et on ne peut guère douter de cette origine. Je chercherai à déterminer ce magnétisme et son action inductrice avec plus de précision dans le cas d'un fil cylindrique long,

*) Pogg. Ann. t. CXLIII, p. 115.

détermination qui ne présente pas de difficultés, car on a affaire ici à une espèce de magnétisme dont les effets ne sont pas du tout magnétiques, mais seulement électriques.

La force magnétisante qu'exerce tout le courant sur des points du fil situés sur un cercle à la distance a de l'axe du fil est dirigée suivant la tangente au cercle. L'élément de courant qui a pour coordonnées semi-polaires x, r, θ, et pour intensité u, exercera sur un point, dont les coordonnées sont 0, a, 0, une influence magnétisante, ayant pour direction cette tangente et pour grandeur

$$u \frac{(a - r\cos\theta)\, r dr\, dx\, d\theta}{(x^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on intègre cette expression de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, ce qui revient à supposer le fil infiniment long, de $\theta = 0$, à $\theta = 2\pi$ et de $r = 0$ à $r = a$ (le rayon du fil) on obtiendra

$$2\pi u a.$$

Par conséquent, si l'on désigne par k la fonction de magnétisation du fer et par M le moment magnétique produit dans l'unité de volume du fil à la distance a de l'axe, on aura

$$M = 2\pi u a k.$$

Pour un élément de volume de coordonnées x, a et θ le moment magnétique sera par conséquent $Ma\, da\, dx\, d\theta$. Une variation de ce moment produira sur un point de coordonnées 0, r, 0, une force électromotrice dont la composante suivant l'axe du fil est

$$-\frac{dM}{dt} \frac{(a - r\cos\theta)\, a\, da\, dx\, d\theta}{(x^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où l'on déduit, en intégrant entre $x = -\infty$ et $x = +\infty$, entre $a = 0$ et $a = \alpha$, entre $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$,

$$-4\pi^2 k \frac{du}{dt}(\alpha^2 - r^2).$$

La force électromotrice induite est donc maxima sur l'axe et s'évanouit à la surface du fil. Si nous prenons la moyenne de toute la section normale du fil, et si nous désignons l'intensité du courant par $i = \pi\alpha^2 u$, cette moyenne deviendra

$$-2\pi k \frac{di}{dt}.$$

La constante électrodynamique d'un fil de grande longueur l peut donc être exprimée par

$$C = l\left(2\log\frac{l}{\alpha} + 2\pi k\right).^*$$ * NOTE 9.

Il résulte de là que la fonction de magnétisation k entre d'une manière simple dans l'expression de la constante électrodynamique, et que l'augmentation de cette constante produite par le magnétisme est indépendante de l'épaisseur du fil. Dans les expériences citées ci-dessus on avait $l = 31^m$ et $C = 2080^m$ pour le fil le plus épais. On déduit de là que k est égal à 10 environ, résultat qui concorde assez bien avec ce que nous savons de la fonction de magnètisation du fer.

Cette fonction ne peut pourtant pas, comme on sait, être considérée comme une constante proprement dite, et, ce qui importe surtout ici, la variation du moment magnétique ne correspond pas à chaque instant à la variation simultanée des forces. Il s'ensuit que la durée du courant extraordinaire d'un fil de fer sera plus grande que celle d'un fil de cuivre; c'est pourquoi l'on ne doit

pas s'attendre, (ce qui ressort d'ailleurs des expériences), à ce que les courants extraordinaires d'un fil de fer et d'un fil de cuivre ou même de deux fils de fer différents puissent coïncider complétement.

L'influence des propriétés magnétiques d'un fil télégraphique en fer ne sont pas en tout cas nuisibles. Bien qu'une vitesse de propagation plus petite corresponde à une constante dynamique plus grande, en même temps le coefficient d'absorption ou le décroissement de l'intensité des courants périodiques pour les distances plus grandes sera plus petit. Au contraire l'influence de l'inertie magnétique sera en tout cas nuisible, car elle effacera les impulsions données. Le magnétisme du fil les rendra un peu plus fortes, mais moins distinctes.

Il importe essentiellement, pour le calcul de la vitesse de l'électricité dans les fils télégraphiques en fer, de tenir compte du magnétisme du fer. On pourrait bien aussi se demander pour des fils d'un autre métal, si l'influence du magnétisme de l'air ambiant et des propriétés magnétiques ou diamagnétiques du fil lui-même ne seraient d'aucune conséquence; mais on reconnaîtra bientôt que ces circonstances n'auraient qu'une influence négligeable. Au contraire la réaction des courants induits dans la terre elle-même auront une influence importante. Le calcul fera ressortir ce résultat intéressant, que de même qu'un corps électrisé produit dans la terre une distribution électrique qui réagit comme s'il y avait dans la terre une image du corps électrisé chargée d'une quantité d'électricité égale et opposée, de même un circuit élevé au-dessus du sol et placé horizontalement produira dans la terre des courants induits *qui, à leur tour, réagiront sur le circuit au dessus du sol de la même manière que*

s'il y avait au-dessous du sol un circuit télégraphique de courant égal et de sens inverse, placé symétriquement par rapport à la surface de niveau de la terre.

On pourrait au premier abord croire que la réaction dépendrait tant de la conductibilité de la terre que de la fréquence des changements du courant; mais une conductibilité plus complète et des changements plus fréquents n'auraient tous deux pour effet que de renforcer les courants à la surface de la terre, et ces courants préserveraient pour ainsi dire les couches de dessous, de sorte que les influences inductrices ne s'étendraient qu'à une plus petite profondeur.

La démonstration exacte de cette proposition peut être faite de la manière suivante. Soit i l'intensité du courant dans un élément ds d'un fil télégraphique au dessus du sol à un temps donné t, et posons $\frac{di}{dt} = \lambda i$. Soient de plus u et u' les densités des courants, parallèles à l'élément, induits dans la terre aux points correspondants aux coordonnées sphériques r, θ, ω, r', θ', ω', tandisque l'axe fixe du système de coordonnées est supposé passer par l'élément ds, situé à la distance a de l'origine, placé au centre de la terre.

Comme le rayon de la terre peut être supposé infiniment grand en comparaison de la distance du circuit télégraphique à la surface de la terre, les courants électriques induits dans l'intérieur de la terre ne pourront pas produire d'électricité libre à la surface de la terre; c'est pourquoi nous pourrons supposer que les courants à l'intérieur de la terre ne sont produits que par induction, en partie par les courants induits du voisinage dans la terre, en partie par le courant dans l'élément ds du

fil télégraphique. Par suite la densité u du courant sera déterminé par la formule

$$u = -K\lambda\left(\int dv' \frac{u'}{\rho'} + i\frac{ds}{\rho}\right), \tag{4}$$

où K est la conductibilité spécifique de la terre, ρ' et ρ les distances du point en question (r, θ, ω) au point (r', θ', ω') et à l'élément ds, et où l'intégration est étendue aux éléments de volume dv' de toute la terre correspondants aux coordonnées r', θ', ω'. De cette équation on peut déduire l'équation aux dérivées partielles bien connue:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2} = \varepsilon^2 r^2 u, \tag{5}$$

où nous avons posé pour abréger $4\pi K\lambda = \varepsilon^2$.

L'intégrale de cette équation peut être exprimée par une somme de la forme

$$u = \Sigma C_n P_n \varphi_n(r), \tag{6}$$

où n prend toutes les valeurs positives et entières de 0 jusqu'à ∞, et où C_n est une constante; P_n est le coefficient de r^n dans le développement de

* NOTE 10.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}}\,*$$

suivant les puissances croîssantes de r, et $\varphi_n(r)$ une fonction de r seul.

Cette dernière fonction doit satisfaire à la condition

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_n(r)}{dr}\right) = [n(n+1) + \varepsilon^2 r^2]\,\varphi_n(r),$$

équation qui est vérifiée par la série convergente

$$\varphi_n(r) = r^n\left(1 + \frac{\varepsilon^2 r^2}{2(2n+3)} + \frac{\varepsilon^4 r^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + \dots\right) \quad (7)$$

Si l'on introduit ces valeurs de u et u' dans l'équation (4), la constante C_n aura pour expression

$$C_n = -\frac{\varepsilon^2 R^{n-1} i\, ds}{4\pi a^{n+1} \varphi_{n-1}(R)}, * \quad (8)$$ * NOTE 11.

où R est le rayon de la terre.

Les courants déterminés de cette manière dans l'intérieur de la terre produiront à leur tour par induction une force électromotrice parallèle au courant au point r, θ, ω situé à l'extérieur de la terre ($r > R$). Cette force électromotrice sera exprimée par

$$X = -\lambda \int dv' \frac{u'}{\rho'},$$

intégrale qui ne diffère de l'intégrale de l'équation (4) qu'en ce que le point fixe r, θ, ω est situé à l'extérieur de la terre. Effectuant l'intégration indiquée, on trouve

$$X = -4\pi\lambda \sum \frac{C_n P_n R^{n+2} \varphi_{n+1}(R)}{(2n+1)(2n+3) r^{n+1}}. \quad (9)$$

Pour déterminer cette somme avec plus de précision, on peut remarquer que la fonction $\varphi_{n+1}(r)$ peut être exprimée à l'aide de fonctions analogues d'indices moindres, en vertu de l'équation

$$\varepsilon^2 r \varphi_{n+1}(r) = (2n+1)(2n+3)[r\varphi_{n-1}(r) - \varphi_n(r)],$$

et qu'on a

$$\varphi_0(r) = \frac{e^{r\varepsilon} - e^{-r\varepsilon}}{2r\varepsilon}, \quad \varphi_{-1}(r) = \frac{e^{r\varepsilon} + e^{-r\varepsilon}}{2r}.$$

Dans le cas qui nous occupe on peut de plus considérer $R\varepsilon$ comme un nombre très grand, puisqu'on a $\varepsilon^2 = 4\pi K\lambda$, où λ dépend de la fréquence des variations du courant. Si l'on prend la seconde pour unité de temps, et si l'on suppose que λ soit un nombre complexe, son module ne sera supérieur à l'unité que pour des variations très lentes du courant, cas qu'on peut négliger ici. K représente la conductibilité de la terre et il faut trancher la question de savoir si R^2K peut être considéré comme un nombre très grand.

Le mètre étant pris pour unité de longueur, on aura $R^2 = 4 \cdot 10^{13}$ environ, et la conductibilité du mercure par exemple est égale à 0,1, de sorte que, même si la conductibilité de la terre était plusieurs millions fois plus petite que celle du mercure, R^2K serait encore un grand nombre; il faudrait la terre dût être considerée comme un isolateur proprement dit pour que notre supposition fût erronée.

Avec ces hypothèses on reconnaît facilement qu'on aura

$$\varepsilon^2 \varphi_{n+1}(R) = (2n+1)(2n+3)\varphi_{n-1}(R),$$

par suite, en introduisant dans l'équation (9) la valeur de C_n, exprimée par la formule (8), on obtiendra finalement

$$X = \lambda i ds \sum \frac{P_n R^{2n+1}}{a^{n+1}\, r^{n+1}} = \frac{R\lambda i ds}{a\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{a}\right)^2 - 2r\left(\frac{R^2}{a}\right)\cos\theta}}. \quad (10)$$

On pourrait ici de nouveau remplacer λi par $\frac{di}{dt}$. Si l'on pose $a - R = h$, $r - R = h_1$, et $R \sin\theta = d$, h étant la distance du fil télégraphique à la terre, h_1 la

distance de la terre au point, où la force électromotrice induite par la réaction de la terre est X, et d la distance des verticales des deux points, on aura, puisque R peut être considéré comme infiniment grand en comparaison de ces deux distances,

$$X = \frac{di}{dt} \frac{ds}{\sqrt{(h+h_1)^2+d^2}}. \tag{11}$$

La proposition énoncée est donc démontrée.

Par ce résultat la constante électrodynamique d'une unité de longueur d'un fil télégraphique au-dessus du sol est réduite à

$$C = 2 \log \frac{2h}{a} + 2\pi k, *$$

* NOTE 12

où h est la hauteur du fil au-dessus de la terre, a le rayon du fil et k sa fonction de magnétisation. Pour des fils non magnétiques ce terme s'évanouira.

Si l'on se sert de cette expression de la constante électrodynamique, par exemple dans le cas des expériences faites par Fizeau et Gounelle* sur la vitesse de la propagation de l'électricité dans le fil de fer entre Amiens et Paris, on trouvera dans les conditions données une vitesse de 126000 kilomètres, si la fonction de magnétisation est 10, tandisque la vitesse observée était de 101710^{km}.

La différence des vitesses observée et calculée est ici considérablement plus petite que par la méthode de calcul employée jusqu'ici, et l'écart qui subsiste peut

* Comptes rendus. 30. 1850.

être attribué principalement au défaut isolation. A raison de l'intérêt théeorique que présentent les expériences sur la propagation de l'électricité par fils placés au dessus du sol, il faut déterminer tant l'importance du défaut d'isolation que, par des mesures directes, la constante électrodynamique des fils de fer.

NOTES.

NOTE 1. Une analyse de ce mémoire se trouve dans les „Fortschr. d. Physik“, t. 35, p. 828—830.

NOTE 2. Si l'on se sert de l'expression de la constante d'induction C' (le coefficient de selfinduction d'un corps) indiquée par Lorenz, on aura, dans le cas où le conducteur est composé de deux fils linéaires parallèles ayant la même longueur, placés à une distance d l'une de l'autre et formant un rectangle, quand leurs bouts sont en communication

$$C' = 2\int_0^l\int_0^l \frac{ds\,ds'}{\sqrt{(s-s')^2+d^2}}$$

$$= 4\left[l\log\left(\frac{l}{d}+\sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2+1}\right)-\sqrt{l^2+d^2}+d\right].$$

Si l est grand en comparaison de d, on peut approximativement poser

$$C' = 4\left[l\left(\log\frac{2l}{d}-1\right)+d\right],$$

et si d est petit, le dernier terme peut aussi être négligé.

Si l'un des fils est remplacé par une couche cylindrique, d'épaisseur infiniment mince dr, dont l'axe est à la distance d de l'autre fil et dont le rayon est r, r et d étant petits, on aura approximativement

$$C' = \frac{4l}{2\pi r\,dr}\int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta\left(\log\frac{2l}{\sqrt{d^2+r^2-2d\cdot r\cos\theta}}-1\right),$$

où C' désigne le coefficient d'induction mutuelle du fil et de la couche cylindrique.

Mais si l'on pose

$$u = \int_0^{2\pi}\log\sqrt{d^2+r^2-2d\cdot r\cos\theta}\,d\theta,$$

on aura

$$\frac{du}{dr} = \int_0^{2\pi}\frac{(r-d\cdot\cos\theta)}{d^2+r^2-2d\cdot r\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & \\ \dfrac{2\pi}{r} & \text{selon que} \end{cases} \begin{matrix} d > r \\ d < r. \end{matrix}$$

On aura par conséquent dans les deux cas

$$u = \begin{cases} c_1 \\ 2\pi\log r + c_2, \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont indépendants de r; si l'on fait $d = 0$, on obtient dans le dernier cas $u = 2\pi\log r$, et par suite $c_2 = 0$. Comme u est symétrique par rapport à d et r, on obtiendra $c_1 = 2\pi\log d$, et par conséquent

$$C' = \begin{cases} 4l\left(\log\dfrac{2l}{d}-1\right) \\ 4l\left(\log\dfrac{2l}{r}-1\right) \end{cases} \text{selon que} \begin{matrix} d > r \\ r > d. \end{matrix}$$

On reconnaît par là que, si $d > r$, la couche cylindrique peut être remplacée par la ligne droite qui coïncide avec son axe. Il s'ensuit que le coefficient d'induction mutuelle des deux couches cylindriques de rayons

r et r' ($r+r'$ plus petit que d) qui ont les deux lignes pour axes sera

$$C' = 4l\left(\log\frac{2l}{d} - 1\right).$$

Enfin on aura le coefficient C' d'induction mutuelle de deux couches cylindriques dont l'une, de rayon r, entoure l'autre,

$$C' = 4l\left(\log\frac{2l}{r} - 1\right).$$

La constante d'induction C' d'un cylindre solide de rayon α sera par conséquent

$$\begin{aligned} C' &= \frac{4l}{\pi^2\alpha^4}\int_0^\alpha\int_0^r 4\pi^2 r r'\left(\log\frac{2l}{r} - 1\right) dr\,dr' \\ &= \frac{4l}{\alpha^4}\int_0^\alpha 2r^3\left(\log\frac{2l}{r} - 1\right) dr \\ &= 2l\left(\log\frac{2l}{\alpha} - \frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

La constante d'induction d'un corps composé de deux fils parallèles et cylindriques de rayon α, placés à la distance d l'un de l'autre sera par suite approximativement

$$C' = 4l\left(\log\frac{d}{\alpha} + \frac{1}{4}\right),$$

si leurs longueurs sont l et si leurs bouts sont reliés par un fil. Cette expression concorde avec celle qu'a obtenue Maxwell (voir „Electricity and magnetism“ 3e éd., t. II, p. 318).

Si l'on a deux fils cylindriques ayant tous les deux la même longueur d et dont les axes sont situés sur

la même droite et dont la plus courte distance est pd; si, de plus, leur rayon α peut être considéré comme infiniment petit en comparaison de d, on aura pour expression de leur coefficient d'induction mutuelle

$$2\int_0^d\int_0^d \frac{dx\,dy}{pd+x+y}$$

$$= 2d[(p+2)\log(p+2) - 2(p+1)\log(p+1) + p\log p].$$

Après avoir établi ces formules, on peut déterminer la constante d'induction d'un fil de la forme de celui dont s'est servi Lorenz.

Le fil était composé de $2m$ segments cylindriques et parallèles de longueur l et de rayon α, dont les bouts étaient reliés par $(2m-1)$ segments de longueur d et de rayon α. Tout le fil était situé dans le même plan, et la distance de deux segments voisins était d. La distance des segments extrêmes était donc $(2m-1)d$. Il y avait donc $2m-1$ couples de cylindres de la longueur l à la distance d l'un de l'autre, $2m-2$ à la distance $2d$, et ainsi de suite.

De plus il y avait $(2m-3)$ couples de cylindres de longueur d, placés de telle sorte que l'axe de l'un était situé sur le prolongement de l'axe de l'autre et dont la plus courte distance était d; il y avait $(2m-5)$ couples dont la plus courte distance était $2d$ et ainsi de suite.

Si l'on se sert des expressions obtenues ci-dessus la constante d'induction du fil total sera par conséquent

$$C' = 4l\left[m\left(\log\frac{2l}{\alpha}-\frac{3}{4}\right)-(2m-1)\left(\log\frac{2l}{d}-1\right)\right.$$
$$+(2m-2)\left(\log\frac{2l}{2d}-1\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.-\left(\log\frac{2l}{(2m-1)d}-1\right)\right]$$
$$+2d\left[(2m-1)\left(\log\frac{2d}{\alpha}-\frac{3}{4}\right)\right.$$
$$+(2m-3)[3\log 3-4\log 2]$$
$$+(2m-5)[5\log 5-8\log 4+3\log 3]$$
$$+(2m-7)[7\log 7-12\log 6+5\log 5]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+1[(2m-1)\log(2m-1)-(4m-4)\log(2m-2)$$
$$+(2m-3)\log(2m-3)].$$

Mais $(2m-1)-(2m-2)+(2m+3)\ldots+1 = m.$

Par conséquent on aura

$$C' = 4l\left[m\left(\log\left(\frac{d}{\alpha}\right)+\frac{1}{4}\right)-(2m-2)\log 2+(2m-3)\log 3\right.$$
$$\left.-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$
$$+2d\left[(2m-1)\left(\log\left(\frac{2d}{\alpha}\right)-\frac{3}{4}\right)\right]+2\left[-(2m-3)\,2\log 2\right.$$
$$+(2m-4)\cdot 3\log 3-(2m-5)\cdot 4\log 4$$
$$\left.+(2m-6)\,5\log 5\ldots\right].$$

On doit pourtant introduire ici une petite correction. Car la constante d'induction de deux fils linéaires et parallèles est

$$4l\left(\log\frac{2l}{d}-1\right)+4d,$$

ce qui fait ressortir que le coefficient d'induction mutuelle

de deux cylindres à axes parallèles, calculé p. 229 doit être augmenté à peu près de $4d$, si d est grand en comparaison de a.

Par conséquent l'expression de C' trouvée ici doit être diminuée de

$$4d[(2m-1)-2(2m-2)+3(2m-3)+\ldots+(2m-1)] = 4md.$$

Je ne sais pas comment Lorenz a obtenu son expression, qui ne concorde pas avec l'expression obtenue ici. L'expression de Lorenz est sans doute erronée. C'est pourqoi toutes les constantes d'induction de Lorenz (1), (2), (3), (4), (5) sont trop grandes et doivent être diminuées de $2ml = m \cdot 30^{\mathrm{m}}$ (environ), ce qui est de plus en parfait accord avec les expériences.

NOTE 3. Le coefficient d'induction de deux cercles égaux et dont les centres sont aux deux extrémités d'un segment de longueur h, perpendiculaire à leurs deux plans, est

$$2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{h^2+4r^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}.$$

Le coefficient d'induction d'un cercle qui forme la base d'un cylindre circulaire droit de hauteur h, si chaque portion annulaire du cylindre, de hauteur 1, est parcourue par un courant d'intensité $n\left(a = \frac{1}{n}\right)$, est

$$\frac{2\pi r^2}{a}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h^2+4r^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}$$

$$= 2\frac{\pi r^2}{a}\int_0^{2\pi}\log\left(\frac{h}{2r\sin\frac{1}{2}\theta}+\sqrt{1+\frac{h^2}{4r^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}\right)\cos\theta\, d\theta.$$

La constante d'induction d'une couche cylindrique comme celle qui est mentionnée dans le texte sera donc

$$\frac{4\pi r^2}{a^2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^h\log\left(\frac{h}{2r\sin\frac{1}{2}\theta}+\sqrt{1+\frac{h^2}{4r^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}\right)dh$$

$$=\frac{4\pi r^2}{a^2}\left[h^2\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\frac{1}{2}\theta\,d\theta}{\sqrt{4r^2\sin^2\frac{1}{2}\theta+h^2}}-\int_0^{2\pi}\sqrt{h^2+4r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta}\cos\theta\,d\theta-\tfrac{8}{3}r\right]$$

Si l'on pose ici $\theta=\pi-2\varphi$, et $c^2=\dfrac{4r^2}{h^2+4r^2}$, on obtiendra facilement l'expression du texte.

NOTE 4. Le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines sera

$$(A,B)=\frac{4\pi r r'}{a a'}\int_0^h dx\int_0^{h'}dx'\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(x+x'+d)^2+\rho^2}},$$

étant posé

$$\rho=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}.$$

Par conséquent on aura

$$(A,B)=\frac{4\pi r r'}{a a'}\int_0^h dx\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\left[\log\left(\frac{x+d+h'}{\rho}+\sqrt{\frac{(x+d+h')^2}{\rho^2}+1}\right)\right.$$
$$\left.-\log\left(\frac{x+d}{\rho}+\sqrt{\frac{(x+d)^2}{\rho^2}+1}\right)\right]$$

$$=\frac{4\pi r r'}{a a'}\left[\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\,h\log\left(\frac{h+h'+d}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{h+h'+d}{\rho}\right)^2+1}\right)\right.$$
$$-\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^h\frac{x\,dx}{\sqrt{(x+d+h')^2+\rho^2}}$$
$$-\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\,h\log\left(\frac{h+d}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{h+d}{\rho}\right)^2+1}\right)$$
$$\left.+\int_0^{2\pi}\cos\theta\int_0^h\frac{x\,dx}{\sqrt{(x+d)^2+\rho^2}}\right].$$

Mais on a

$$\int_0^h \frac{x\,dx}{\sqrt{(x+d+h')^2+\rho^2}} = \sqrt{(h+h'+d)^2+\rho^2} - \sqrt{(d+h')^2+\rho^2}$$
$$-(d+h')\log\left(\frac{h+h'+d}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{h+h'+d}{\rho}\right)^2+1}\right)$$
$$+(d+h')\log\left(\frac{h'+d}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{h'+d}{\rho}\right)^2+1}\right),$$

et

$$\int_0^h \frac{x\,dx}{\sqrt{(x+d)^2+\rho^2}} = \sqrt{(h+d)^2+\rho^2} - \sqrt{d^2+\rho^2}$$
$$-d\log\left(\frac{d+h}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{h+d}{\rho}\right)^2+1}\right)$$
$$+d\log\left(\frac{d}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{d}{\rho}\right)^2+1}\right)$$

Si l'on substitue les valeurs de ces intégrales dans l'expression de (A, B), on obtiendra

$$(A, B) = \frac{4\pi r r'}{a a'}\left[\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\left[(h+h'+d)\log\left(\frac{h+h'+d}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{h+h'+d}{\rho}\right)^2+1}\right)\right.\right.$$
$$\left.-\sqrt{(h+h'+d)^2+\rho^2}\right]$$
$$-\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\left[(h+d)\log\left(\frac{h+d}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{h+d}{\rho}\right)^2+1}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{(h+d)^2+\rho^2}\right]$$
$$-\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\left[(h'+d)\log\left(\frac{h'+d}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{h'+d}{\rho}\right)^2+1}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{(h'+d)^2+\rho^2}\right]$$
$$+\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\left[d\log\left(\frac{d}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{d}{\rho}\right)^2+1}\right)-\sqrt{d^2+\rho^2}\right]$$

Il en résulte que (A, B) est composé de quatre termes de la forme

$$\frac{4\pi r r'}{a a'}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\left[p\log\left(\frac{p}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{p}{\rho}\right)^2+1}\right)-\sqrt{p^2+\rho^2}\right].$$

Une telle expression peut être évaluée au moyen des intégrales elliptiques. On a, en effet,

$$p\int_0^{2\pi}\cos\theta\log\left(\frac{p}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{p}{\rho}\right)^2+1}\right)d\theta = p^2\int_0^{2\pi}\frac{r r'\sin^2\theta}{\rho^2\sqrt{p^2+\rho^2}}d\theta$$

$$= 4p^2 r r'\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2\varphi\, d\varphi}{[(r-r')^2+4rr'\cos^2\varphi]\sqrt{p^2+(r+r')^2-4rr'\sin^2\varphi}},$$

ce qu'on obtient en posant $\theta = \pi - 2\varphi$. Si l'on pose de plus

$$c^2 = \frac{4rr'}{p^2+(r+r')^2},$$

cette expression prendra la forme

$$\frac{4p^2 r r'}{\sqrt{p^2+(r+r')^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2\varphi\, d\varphi}{((r-r')^2+4rr'\cos^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Mais

$$\frac{p^2}{\sqrt{p^2+(r+r')^2}} = 2\sqrt{rr'}\left(\frac{1-c^2}{c}\right)-\frac{c(r'-r)^2}{2\sqrt{rr'}},$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2\varphi\, d\varphi}{((r-r')^2+4rr'\cos^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{rr'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}-\frac{(r-r')^2}{rr'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{[(r-r')^2+4rr'\cos^2\varphi]\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on suppose que $r'-r$ est petit en comparaison de rr', le dernier terme aura une valeur très petite.

Il peut être calculé approximativement de la manière suivante.

Si $r'-r$ est petit, les éléments qui correspondent aux petites valeur de φ n'auront qu'une somme négligeable en comparaison de ceux qui correspondent aux valeurs de φ voisines de $\frac{\pi}{2}$. Si l'on met l'intégrale sous la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\psi\, d\psi}{[(r'-r)^2+4rr'\sin^2\psi]\sqrt{1-c^2\cos^2\psi}},$$

on peut donc négliger la partie de l'intégrale pour laquelle ψ n'est pas petit. Mais, dans ce cas, on peut remplacer $\sin\psi$ par ψ, $\cos\psi$ par 1, et l'intégrale peut sans erreur sensible être remplacée par

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(r-r')^2+4rr'\psi^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{rr'}(r'-r)\sqrt{1-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{rr'}}{r'-r}\frac{\pi}{2},$$

et, comme $\frac{2\sqrt{rr'}}{r'-r}$ est très grand, on peut remplacer $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{rr'}}{r'-r}\frac{\pi}{2}$ par $\frac{\pi}{2}$. En négligeant les termes dans lesquels $r'-r$ figure à une puissance supérieure à la première, on aura alors

$$\frac{4p^2rr'}{\sqrt{p^2+(r+r')^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi\, d\varphi}{[(r-r')^2+4rr'\cos^2\varphi]\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$

$$= 4\left(\frac{1-c^2}{c}\right)\left[2\sqrt{rr'}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} - \frac{(r'-r)}{\sqrt{1-c^2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

Si l'on introduit les mêmes notations dans la seconde intégrale, il viendra

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \sqrt{p^2+\rho^2}\, d\theta = 4\sqrt{p^2+(r+r')^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{8\sqrt{rr'}}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\, d\varphi .$$

On aura finalement

$$\frac{4\pi rr'}{aa'} \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \left[p \log\left(\frac{p}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{p}{\rho}\right)^2 + 1} \right) - \sqrt{p^2+\rho^2} \right]$$

$$= \frac{32\pi rr'\sqrt{rr'}}{3aa'} \left[-\frac{3(r'-r)\sqrt{1-c^2}}{2\sqrt{rr'}\,c} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{2c^2-1}{c^3} E + \frac{1-c^2}{c^3} K \right].$$

Cette expression ne concorde pas complètement avec l'expression de Lorenz; mais la différence des valeurs des deux expressions est très petite. On a en effet

$$\frac{3(r'-r)\sqrt{1-c^2}}{2\sqrt{rr'}\,c} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi(r'-r)\sqrt{1-c^2}}{2(r'+r)c}$$

$$= \frac{3\pi}{4} \frac{\sqrt{1-c^2}(r'-r)(\sqrt{r'}-\sqrt{r})^2}{c\sqrt{rr'}(r+r')},$$

diflérence qui, daus le cas présent, est insignifiante.

NOTE 5. Les constantes (1), (2), (3), (4), (5) doivent toutes être diminuées de $m \cdot 30^m$ environ, m désignant le nombre de tours des fils.

NOTE 6. Vraisemblablement les valeurs 4, 17 etc.: qu'on a obtenues par estimation doivent être diminuées de quelques unités pour cent aussi bien que les valeurs (1), (2) ... De cette manière les valeurs calculées seront à peu près les mêmes que celles qu'a calculées Lorenz.

NOTE 7. Si l'on tient compte de la correction indiquée dans la note 5, la valeur de (5) sera à peu près 1150^m, ce qui concorde presque complètement avec la valeur observée. C'est pourquoi je crois qu'on doit supposer que les valeurs calculées de A et B doivent seules être diminuées de 5 à 6 pour cent.

NOTE 8. 3,966 d'après mes calculs.

NOTE 9. D'après la note 2 cette constante doit être

$$l\left(2\log\frac{2l}{a}-\frac{3}{2}+2\pi k\right).$$

Lorenz fait dans ce qui suit une application de la formule. Cette application n'est pas admissible. Car la formule n'est valable que dans le cas d'un fil rectligne, et dans l'application il s'agit d'un fil qui fait un tour.

NOTE 10. P_n désigne un polynôme de Legendre, d'ordre n, et par suite il est le coefficient de $\frac{r^n}{a^{n+1}}$ dans le développement de $\frac{1}{\rho}$.

NOTE 11. Comme on le reconnaît facilement, on a

$$\frac{d\left(\frac{\varphi_n}{r^n}\right)}{dr}=\frac{\varepsilon^2\varphi_{n+1}}{(2n+3)r^n},$$

et

$$\frac{d(\varphi_{n+1}r^{n+2})}{dr}=(2n+3)\varphi_n r^{n+2}.$$

Si l'on suhstitue la valeur trouvée pour u dans l'équation (4), on aura

$$\sum C_n \varphi_n P_n = \frac{-\varepsilon^2}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{r'^2 \Sigma C_n \varphi_n(r')\, P_n(\cos\theta')\sin\theta'\, d\omega'\, d\theta'\, dr'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}} + \frac{i\,ds}{\sqrt{a^2+r^2-2ra\cos\theta}}\right),$$

où $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega'$.

Mais on a

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}} = \begin{cases} \sum P_n(\cos\gamma)\dfrac{r^n}{r'^{n+1}} \\ \sum P_n(\cos\gamma)\dfrac{r'^n}{r^{n+1}} \end{cases} \text{ selon que } r' \gtrless r,$$

et de plus

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta')\, P_n(\cos\gamma)\, d\omega'\, d\theta' = \frac{4\pi}{2n+1}\, P_n(\cos\theta).$$

Par conséquent on a

$$\sum C_n \varphi_n P_n = -\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\sum\left[C_n\left(\int_0^{r}\frac{r'^{n+2}}{r^{n+1}}\varphi_n(r')\,dr' + \int_r^{R}\frac{r^n}{r'^{n-1}}\varphi_n(r')\,dr'\right)\frac{4\pi}{2n+1} + \frac{i\,r^n\,ds}{a^{n+1}}\right]P_n.$$

Si l'on égale les coefficients de P_n dans les deux membres de cette équation, on obtiendra

$$C_n\varphi_n = -\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\left[C_n\frac{4\pi}{2n+1}\left(\int_0^{r}\frac{r'^{n+2}}{r^{n+1}}\varphi_n(r')\,dr' + \int_r^{R}\frac{r^n\varphi_n(r')}{r'^{n-1}}\,dr'\right) + \frac{i\,r^n\,ds}{a^{n+1}}\right].$$

Si l'on divise les deux membres de l'équation par r^n et si l'on fait ensuite tendre r vers zéro, on obtiendra

$$C_n = -\frac{\varepsilon^2}{2n+1}C_n\int_0^{R}\frac{\varphi_n(r')\,dr'}{r'^{n-1}} - \frac{\varepsilon^2\, i\, ds}{4\pi a^{n+1}}$$

$$= \frac{-C_n\varphi_{n-1}(R)}{R^{n-1}} + C_n\frac{\varepsilon^2\, i\, ds}{4\pi a^{n+1}}.$$

De la même manière on obtient l'expression (9). Enfin on peut remarquer que l'équation

$$\varepsilon^2 r \varphi_{n+1} = (2n+1)(2n+3)(r\varphi_{n-1} - \varphi_n)$$

est une conséquence des deux équations

$$\frac{d\left(\frac{\varphi^n}{r^n}\right)}{dr} = \frac{\varepsilon^2 \varphi_{n+1}}{(2n+3)\, r^n} \quad \text{et} \quad \frac{d(\varphi_n r^{n+1})}{dr} = (2n+1)\varphi_{n-1} r^{n+1}.$$

Si, dans ces deux équations, on pose $n = -1$ et $n = 0$, on obtiendra

$$\frac{d(\varphi_{-1} \cdot r)}{dr} = \varepsilon^2 \varphi_0 \cdot r, \qquad \frac{d(\varphi_0 \cdot r)}{dr} = \varphi_{-1} \cdot r.$$

De là on déduit

$$\frac{dr(\varphi_0 \varepsilon + \varphi_{-1})}{dr} = \varepsilon(\varepsilon\varphi_0 + \varphi_{-1})\, r,$$

$$r(\varphi_9 \varepsilon + \varphi_{-1}) = c e^{r\varepsilon},$$

et si l'on fait $r = 0$, on reconnaît que $c = 1$.

De la même manière on obtient

$$r(\varphi_{-1} - \varphi_0 \varepsilon) = e^{-r\varepsilon}.$$

Si l'on se sert de l'équation

$$\varepsilon^2 \varphi_n = (2n+1) r^{n-1} \frac{d\left(\frac{\varphi_{n-1}}{r^{n-1}}\right)}{dr},$$

on obtient par induction

$$\varepsilon^{2n} \varphi_n = 1 \cdot 3 \ldots (2n+1) \left[\frac{\varepsilon^{n-1} u_{n-1}}{r} - \frac{n(n+1)}{2} \frac{\varepsilon^{n-2} u_{n-2}}{r^2} \right.$$

$$+ \frac{(n-1)n}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{4} \frac{\varepsilon^{n-3} u_{n-3}}{r^3}$$

$$\left. + \ldots (-1)^n \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{4} \cdots \frac{(2n-1)2n}{2n} \frac{u_{-1}}{\varepsilon r^{n+1}} \right],$$

où $u_n = \dfrac{e^{r\varepsilon} + (-1)^n e^{-r\varepsilon}}{2}$.

Si $\frac{1}{\varepsilon r}$ est une quantité numériquement petite et si n n'est pas trop grand, on peut approximativement poser

$$\varepsilon^{2n}\varphi_n = 1\cdot 3\ldots(2n+1)\frac{\varepsilon^{n-1}u_{n-1}}{r}.$$

Si au contraire n est un nombre très grand en comparaison de $\varepsilon^2 r^2$, on a approximativement

$$\varphi_n(r) = r^n.$$

Il suit de ces remarques qu'on peut, comme l'a fait Lorenz dans les équations (8) et (9), égaler $\varepsilon^2\varphi_{n+1}(R)$ à

$$(2n+1)(2n+3)\varphi_{n-1}(R),$$

par où l'on obtient l'équation (10).

Je ne comprends pas ce que Lorenz dit de la quantité λ, savoir que λ peut être considéré comme un nombre complexe.

Vraisemblablement il veut dire, que le caractère périodique de λ peut être indiqué en posant $\lambda = e^{(a+bi)t}$ et si l'on ne considère qu'un petit nombre de vibrations, at sera très petit et par conséquent e^{at} une quantité qui ne différera guère de l'unité.

NOTE 12. D'après la note 2 on aura

$$C = 2\log\frac{2h}{a} + \frac{1}{2} + 2\pi k.$$

SUR

LES CONDUCTIBILITÉS

ÉLECTRIQUE ET CALORIFIQUE DES MÉTAUX.

SUR LES CONDUCTIBILITÉS ELECTRIQUE ET CALORIFIQUE DES MÉTAUX.*

VIDENSK. SELSK. SKR. II (6), P. 36—76.

Voici les considérations théoriques sur lesquelles est fondée la première des deux méthodes par lesquelles j'ai cherché à determiner la conductibilité des différents métaux.

Supposons qu'une barre soit chauffée à l'une de ses extrémités. En un point situé à la distance x d'un point donné mais arbitraire de la barre, soit u_x la température, l'échelle des températures ayant pour origine la température des corps environnants. Considérons une série de points équidistants et soient u_o, u_l, u_{2l} ... u_{nl}, les températures de ces points, l étant la distance de deux points consécutifs. La partie de la barre située entre les sections droites qui correspondent à $x = \frac{1}{2} l$ et $x = (n - \frac{1}{2}) l$ reçoit donc, dans l'unité de temps, d'un côté la quantité de chaleur $kq \frac{u_o - u_l}{l}$, si k est la conductibilité calorifique de la barre et q sa section droite, tandis qu'elle communique à l'autre côté la quantité de chaleur $kq \frac{u_{(n-1)l} - u_{nl}}{l}$. Par conséquent, si l'on pose

$$u_o - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl} = \Delta,$$

$\frac{kq\Delta}{l}$ sera la quantité de chaleur reçue par unité de etmps par la partie considérée de la barre, et cette

quantité de chaleur sert en partie à chauffer la barre et en partie est absorbée par le milieu ambiant.

La partie de la barre comprise entre les deux sections a pour longueur $(n-1)l$ et peut être divisée en $n-1$ tranches égales. Pour élever d'un degré la température de chaqune de ces parties, $c\delta ql$ unités de chaleur sont absorbées, si c est la chaleur spécifique du métal, δ son poids spécifique, et comme l'élévation de température au milieu de chaque tranche par unité de temps est $\frac{du_l}{dt}$, $\frac{du_{2l}}{dt} \ldots \frac{du_{(n-1)l}}{dt}$, la quantité totale de chaleur, nécessaire à l'échauffement des $(n-1)$ tranches par unité de temps, pourra être exprimée par $c\delta ql\frac{d\Sigma}{dt}$, si

$$\Sigma = u_l + u_{2l} + \ldots u_{(n-1)l}.$$

L'autre quantité de chaleur, celle qui est absorbée par le milieu ambiant, est une fonction de la température; et si nous supposons que les températures des diverses tranches ne diffèrent pas beaucoup, cette quantité de chaleur peut approximativement être considérée comme une fonction de la température moyenne et par suite comme une fonction f de Σ.

Nous obtiendrons donc l'équation

$$\frac{kq\Delta}{l} = c\delta ql\frac{d\Sigma}{dt} + f(\Sigma). \qquad (1)$$

Par conséquent, si l'on chauffe une extrémité de la barre, et si l'on détermine Δ et Σ par des observations immédiates (au moyen d'éléments thermoélectriques), et si l'on fait ensuite cesser l'échauffement, ce qui réduira bientôt Δ à une nouvelle valeur Δ' très petite, pendant que Σ parcourt en sens inverse les mêmes valeurs qu'an-

térieurement, on obtiendra pour la dernière suite d'expériences l'équation correspondante à (1)

$$\frac{kq\Delta'}{l} = c\delta ql\frac{d\Sigma'}{dt} + f(\Sigma').$$

En retranchant ces deux équations où l'on suppose $\Sigma = \Sigma'$, on trouve

$$\frac{kq}{l}(\Delta - \Delta') = c\delta ql\left(\frac{d\Sigma}{dt} - \frac{d\Sigma'}{dt}\right),$$

où $\frac{d\Sigma}{dt}$ est positif, $\frac{d\Sigma'}{dt}$ négatif. On obtiendra de cette manière par une seule série d'expériences une série de déterminations du rapport $\frac{c\delta}{k}l^2$.

Par une légère modification cette méthode peut encore être rendue un peu plus exacte. Pour le mettre en évidence et pour obtenir en même temps une évaluation de la grandeur des erreurs qu'entraînent les hypothèses mathématiques qui ne sont admissibles qu'avec une certaine approximation, il faut recourir à l'équation différentielle du mouvement de la chaleur dans une barre:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kq\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\delta q\frac{\partial u}{\partial t} + phu. \qquad (2)$$

Ici entrent comme coefficients les quantités mentionnées ci-dessus et en outre, le périmètre p de la barre, et le coefficient h de conduction de la chaleur extérieure. Tous ces coefficients sont en général de fonctions de u; mais si l'on suppose que u soit petit et qu'il ne subisse pas de grandes variations, ils peuvent avec une approximation suffisante être exprimés par

$$\frac{c\delta}{k} = a_0(1+\alpha u), \quad \frac{ph}{kq} = b_0(1+\beta u),$$
$$kq = k_0 q_0 e^{\gamma u},$$

où les coefficients nouveaux sont considérés comme constants.

Par là l'équation différentielle est transformée en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_0(1+\alpha u)\frac{\partial u}{\partial t} + b_0(1+\beta u)u - \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \qquad (3)$$

On reconnaît facilement qu'on a

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl} = \Delta.$$

De plus on aura, $f(x)$ étant une fonction arbitraire

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\, f(x) = l^2(f(l) + f(2l) + \ldots + f(n-1)l)$$
$$+ \frac{l^2}{12}(f(nl) - f(n-l) - f(l) + f(o)) + \ldots, \ *$$

* NOTE 2.

expression qui peut être transformée en

$$l^2\left(f\left(\tfrac{11}{12}l\right) + f(2l) + \ldots + f((n-2)l) + f\left(n - \tfrac{11}{12}\right)l\right) + \ldots;$$

car on a approximativement

$$f((n-1)l) + \tfrac{1}{12}(f(nl) - f(n-1)l) = f\left(\left(n - \tfrac{11}{12}\right)l\right),$$
$$f(l) - \tfrac{1}{12}(f(l) - f(o)) = f\left(\tfrac{11}{12}l\right).$$

En modifiant légèrement le sens du symbole Σ et posant maintenant

$$\Sigma = u_{\frac{11}{12}l} + u_{2l} + \ldots + u_{(n-2)l} + u_{\left(n-\frac{11}{12}\right)l}, \qquad (4)$$

nous tirerons approximativement de (3) par l'intégration double indiquée:

$$\Delta = a_0 l^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + b_0 l^2 \Sigma + \int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx \left(a_0 \alpha u \frac{\partial u}{\partial t} + b_0 \beta u^2 - \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right). \quad (5)$$

La dernière intégrale peut être considérée comme une quantité petite en comparaison des autres termes qui entrent dans l'expression, pourvu que les expériences ne comportent que des élévations de température assez petites. C'est pourquoi nous pouvons calculer approximativement cette intégrale en nous servant, en ce qui la concerne, de l'équation différentielle plus simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_0 \frac{\partial u}{\partial t} + b_0 u,$$

que nous intégrerons en tenant compte des conditions particulières des expériences. On doit donc remarquer que l'échauffement de la barre a été fait de manière à maintenir Δ à peu près constant pendant la durée des mesures.

On satisfait à cette condition par une intégrale de la forme

$$u = A e^{x\sqrt{b_0}} + B e^{-x\sqrt{b_0}} + C e^{-\frac{b_0}{a_0} t},$$

et quoiqu'on puisse employer ici des intégrales de formes différentes, on peut pourtant supposer que l'expression choisie convienne pour exprimer l'état de la température dans la barre pendant la durée des mesures.

L'une des extrémités de la barre est de plus à une distance $\frac{1}{2} l$ du premier point où la température est mesurée. Comme la perte de chaleur est faible au bout de la barre, on peut avec une approximation suffisante poser $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pour $x = -\frac{1}{2} l$.

On peut par là éliminer les constantes A, B, C et l'on obtiendra

* NOTE 3.

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\, u^2 = l^2 \frac{\Sigma^2}{n-1} + l^2 \Delta^2 f, \text{*}$$

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \Delta^2 g,$$

où f et g désignent des nombres déterminés, dépendants de $l^2 b_0$ seul.

En introduisant les valeurs suivantes de $l^2 b_0$ qui comprennent les valeurs différentes que cette quantité prend dans mes expériences, savoir:

$$l^2 b_0 = 0{,}01, \quad 0{,}0225, \quad 0{,}04, \quad 0{,}09, \quad 0{,}16,$$

j'ai trouvé les valeurs correspondantes de f et g

$$f = 11{,}08, \quad 9{,}34, \quad 7{,}66, \quad 4{,}86, \quad 3{,}05,$$
$$g = 3{,}13, \quad 2{,}78, \quad 2{,}40, \quad 1{,}76, \quad 1{,}33,$$

nombres qui peuvent avec une grande approximation être exprimés par la formule empirique

$$f = \frac{68}{5 + 100\, l^2 b_0}, \quad g = \frac{34}{10 + 100\, l^2 b_0}.$$

Si l'on pose de plus

$$f h l^2 \beta - g\gamma = \eta, \quad a_0\left(1 + \frac{\Sigma}{n-1}\alpha\right) = a,$$

$$b_0\left(1 + \frac{\Sigma}{n-1}\beta\right) = b,$$

où a et b désignent par conséquent les valeurs de $\frac{c\delta}{k}$ et $\frac{ph}{qk}$ qui correspondent à la température moyenne $\frac{\Sigma}{n-1}$, l'équation (5) se réduira à

$$\Delta(1 - \eta\Delta) = a l^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + b l^2 \Sigma. \tag{6}$$

Comme toutes les quantités qui entrent dans η peuvent être déduites des expériences elles-mêmes, j'ai pu calculer la correction indiquée par le terme $\eta \Delta$ pour toutes mes expériences; il ressortit de là que cette correction est insignifiante pour tous les métaux à conductibilité considérable. Pareillement elle est sans importance pour l'argenton, qui appartient aux métaux plus mauvais conducteurs, parce qu'ici γ est exceptionnellement positif. Au contraire, la correction monte dans mes expériences sur l'antimoine à 5 pour cent et sur le bismuth même à 10 pour cent, fraction dont il faut diminuer la valeur trouvée pour a.

Les expériences étant exécutées de la manière indiquée ci-dessus, on aura, en égalant $\eta \Delta$ à zéro,

$$a l^2 = \frac{\Delta - \Delta'}{\frac{\partial \Sigma}{\partial t} - \frac{\partial \Sigma'}{\partial t}}, \tag{7}$$

équation qui détermine a.

Il faut encore remarquer que les expériences ne donnent pas immédiatement les valeurs de $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$. Les expériences sont exécutées de manière à déterminer les valeurs du temps t_0, t_1, t_2, ... qui correspondent aux valeurs données de Σ, Σ_0, Σ_1, Σ_2, ..., les Σ croissant ou décroissant en progression arithmétique. Soit t le temps correspondant à $\Sigma = \frac{\Sigma_{m-1} + \Sigma_m}{2}$, on aura

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{\Sigma_m - \Sigma_{m-1}}{t_m - t_{m-1}} \left(1 + \frac{1}{12} \frac{b^2}{a^2} (t_m - t_{m-1})^2 + \ldots\right), * \tag{8}$$ * NOTE 4.

ou le second terme de la série n'a déjà qu'une valeur très petite dans mes expériences. On tiendra pourtant toujours compte de ce terme dans les calculs.

Les métaux qui ont été l'objet de mes recherches étaient cuivre, magnésium, aluminium, cadmium, fer, étain, plomb, antimoine et bismuth et des alliages, laiton rouge et jaune et argenton. De ces 12 métaux j'ai fait fabriquer des barres cylindriques, longues de 30^{cm} et épaisses de $1^{cm},5$. Les barres furent percées d'une suite de trous très fins ($0^{mm},4$ de diamètre). L'un de ces trous, qui devait principalement servir à la détermination de la résistance électrique, était situé à une distance de 1^{cm} de l'une des extrémités de la barre, tandis que la série de neuf trous pareils, distants l'un de l'autre de 2^{cm}, commencait à la même distance de l'autre bout. Ces derniers trous seront désignés par 0, 1, 2 ... 8. Ils étaient parallèles et transversaient la barre suivant un de ses diamètres. De plus il y avait encore deux trous situés entre 0 et 1 et entre 7 et 8 à une distance de $\frac{1}{6}^{cm}$ de 1 et 7. Ces trous étaient forés perpendiculairement aux premiers et un peu excentriques. Ils seront désignés par 1′ et 7′.

Dans ces trous étaient placés les éléments thermo-électriques, en général composés d'un fil de cuivre épais de $0^{mm},1$ et d'un fil d'argenton épais de $0^{mm},3$. La soudure était entourée de soie qu'on avait préalablement déroulée de l'enveloppe du fil de cuivre. On a fait pénêtrer le fil de cuivre par le trou jusqu'à ce que la soudure fût au milieu du trou. L'enveloppe du fil d'argenton formait bourrelet en dehors du trou. L'élément était complètement isolé du trou, ce qu'on a toujours vérifié spécialement.

Pour les deux trous 0 et 1 et pour 7 et 8 on s'est servi d'éléments doubles, car on avait ici soudé l'un des bouts de deux fils de cuivre au bout d'un seul fil d'ar-

genton, qui n'était long que de quelques centimètres. Ces deux éléments doubles n'ont indiqué que la différence de température des deux trous 0 et 1 et de 7 et 8. De plus les deux fils de cuivre qui correspondaient aux trous 0 et 7 ont été réunis par une soudure, de manière à faire correspondre la différence thermoélectrique des fils de cuivre qui partaient de 1 et 8 à la différence de température désignée ci-dessus par Δ.

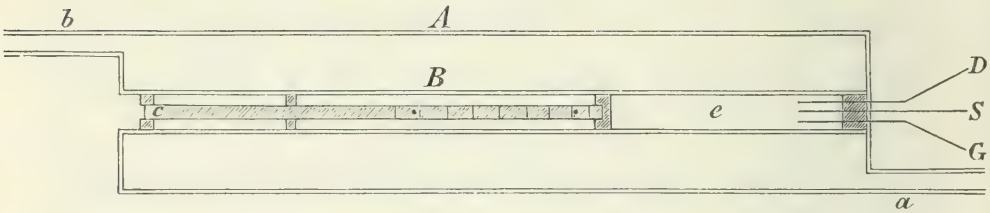
De plus 7 élements thermoélectriques furent placés dans les 7 trous 1′, 2, 3 ... 6, 7′ et combinés en chaîne, et toutes les soudures en dehors de la barre furent placées dans un compartiment particulier, où elles ont pris la température du milieu ambiant. La différence électrique des extrémitées de ce circuit correspondait donc à la somme des températures désignée ci-dessus par Σ (équation (4)).

Les deux fils de cuivre issus de 8 et 1′ étaient tous les deux réunis par une soudure avec un fil de cuivre épais de 1^{mm} (G dans la figure), et deux autres fils de cuivre épais de 1^{mm} (D et S) étaient réunis, le premier avec le fil de cuivre issu de 1, le second avec le fil d'argenton issu de 7′. Les différences électriques de G et D et de G et S correspondent donc aux deux températures Δ et Σ, qui doivent être déterminées par les expériences.

Après que tout fut ainsi disposé, la barre fut placée, pour y être chauffée, dans l'appareil que représente la figure. Cet appareil était composé d'un cylindre fermé (de 47^{cm} de longueur et de $10^{cm},5$ de diamètre), par lequel passait un tube B, large de $4^{cm},3$ et ouvert. Le tout était fait de laiton et avait des parois épaisses.

On a employé cet appareil, soit en maintenant ocn-

stante la température de l'appareil au moyen d'un courant d'eau qui entrait par le tube *a*, soit en le chauffant à 100° grâce à un courant de vapeur qui entrait par *b* et sortait par le tube *a*. La barre était



fixée dans le tube intérieur *B* au moyen de deux bouchons de liège. Un troisième bouchon de liège, qui ne fermait pas complètement l'ouverture, était placé à quelque distance de la surface antérieure *c* de la barre et ne servait que comme écran, de sorte que l'air venant de la partie la plus chaude de la barre était forcé de passer tout près des parois du tube. Les éléments thermoélectriques étaient amenés par de petits trous percés dans le bouchon placé à l'autre extrémité de la barre, de manière que toutes les soudures qui devaient avoir la température de l'appareil à chauffer se trouvaient dans le compartiment *e*, où elles étaient entourées de coton peu serré. Les trois fils de cuivre, *D*, *G* et *S*, mentionnés ci-dessus, étaient placés dans un bouchon de liège qui fermait complètement l'ouverture.

Les forces électromotrices des éléments thermoélectriques furent mesurées de la manière suivante. On avait placé un fil de cuivre, long de 5^{m}, épais de 1^{mm}, sur une table, de manière que son premier demi-mètre fût étendu sur une échelle divisée en millimètres, tandis que le reste du fil était, de demi-mètre en demi-mètre à partir du zéro de l'échelle, fixé à la table et formait

ici un petit arc. On avait mis en relation avec ce fil un rhéostat de Siemens, ainsi qu'une boussole de sinus et un élément de Daniell.

Du bout du fil G, qui sortait de l'appareil à chauffer, un fil conducteur allait à un galvanamètre de Wiedemann à miroir, dont le miroir était rendu sensiblement astatique au moyen d'un fort aimant, et de là au zéro du fil à mesure décrit ci-dessus. Des deux autres fils D et S deux conducteurs allaient, par la table à mesures, à l'observateur assis. Si l'on fait toucher l'un des deux fils conducteurs au fil à mesure, le galvanomètre sera traversé tant par le courant dérivé du fil à mesure que par celui qui provient des éléments thermoélectriques. Si les deux forces électromotrices produites par là dans le circuit sont égales et opposées, aucune déviation n'apparaîtra dans le galvanomètre. De cette manière, toutes les observations sont réduites à des observations du zéro, et l'on pourra lire sur le fil à mesure les valeurs des forces électromotrices Δ et Σ indiquées en millimètres. Ces forces sont précisément celles dont la détermination est le but des expériences, Δ est déterminé par le conducteur qui sort de D et est mesuré sur la partie étendue du fil à mesure, tandis que Σ est déterminé par le conducteur qui sort de S et n'est mesuré que de demi-mètre en demi-mètre sur le reste du fil à mesure.

Tous les fils conducteurs, y compris le fil à mesure et le fil du galvanomètre, étaient faits du même fil de cuivre épais de 1^{mm}, et partout où les bouts de deux fils étaient réunis par une vis de pression, les fils étaient immédiatement en contact l'un avec l'autre. L'un des bouts du fil, qu'on amenait en un point du fil à mesure,

n'était pas manie directement par l'observateur, mais fixé sur une manche de bois. Les mesures furent exécutées à la lumière d'une lampe, dont le galvanomètre était abrité par un écran. On avait le plus grand soin d'empêcher tout rayon du soleil d'entrer dans le local des experiences. L'élément de Daniell fut toujours mis en relation avec les conducteurs une heure avant le commencement des mesures, ce qui permettait d'obtenir un courant constant pendant toute leur duree. Enfin on a comparé exactement les résistances electriques des différentes parties du fil à mesure.

Grâce aux précautious susdites, on a presque toujours trouvé Δ et Σ' égaux à zéro, quand la barre avait pris la temperature constante de la colonne d'eau. Si au contraire l'appareil était chauffé par la vapeur d'eau, cela n'avait pas lieu, et on devait alors compter Δ et Σ' à partier du point de l'échelle qu'indiquerent les mesures, quand la température de la barre avait atteint l'état stationnaire. Ces forces électromotrices constantes étaient en partie produites par les trois fils de cuivre plus épais qui allaient a l'appareil à chauffer, parce qu'ils avaient des températures très différentes à leurs extrémités, entre lesquelles existaient des différences thermoélectriques assez considérables, produites par l'echauffement prealable de l'une d'elles pendant le travail de la soudure.

Au commencement d'une expérience, le tube de l'appareil a chauffer est fermé en c par un bouchon de liège et l'on attend le moment ou la barre, placée dans l'appareil à chauffer, a pris la température constante de celui-ci. Puis le bouchon est ôté, et une barre, en général la barre de cuivre, qui a déjà été chauffée à l'avance, est amenee en c, pendant qu'on continue à chauffer la

barre extérieure au moyen d'une lampe tres faible. Ce chauffage doit être conduit de manière à faire croître rapidement la différence thermoélectrique de la barre placée dans l'appareil à chauffer, et à la maintenir ensuite sensiblement constante pendant quelque temps. Pour pouvoir régler le chauffage avec sûreté, on doit avoir soin que le contact des deux barres soit complètement métallique; aussi la surface extrème de la barre extérieure etait-elle toujours amalgamée de frais. Du reste, je ne puis donner aucune règle générale pour le chauffage; on n'a besoin que de quelque pratique pour reussir, et j'ai dû rejeter les méthodes plus rationnelles de chauffage.

Aussitôt que les mesures indiquent que Δ s'approche d'être constant, on cherche à déterminer Σ en amenant un instant la pointe du fil qui sort de S en contact avec un des petits arcs situés sur le fil à mesure qui indiquent 500, 1000 ... jusqu'à 5000^{mm}, et l'on observe au moyen d'une pendule le moment où le contact ne produit aucun courant.

Puis Δ est détermine avec précision, et l'on observe de nouveau le moment ou Σ depasse la division suivante de l'échelle (distante de 500^{mm} de la précédente) et ainsi de suite, jusqu'à ce que Δ ne soit plus constant ou qu'on ait atteint le point extrême (5000^{mm}) du fil à mesure. Puis le chauffage est interrompu. L'appareil est de nouveau fermé avec le bouchon de liège: Δ décroît alors rapidement et s'approche de zéro. On continue à observer les Σ décroissantes de la même mauière que précédemment, jusqu'a ce qu'on soit revenu à la limite de Σ observée en premier lieu. Le calcul d'une

telle suite d'expériences est exécuté au moyen des équations (7) et (8).

Pour examiner avec plus de précision les diverses causes d'erreur que comportent ces expériences et pour m'assurer complètement de l'acceptabilité des résultats obtenus, j'ai, avant le commencement des mesures finales, exécuté un grand nombre d'expériences, variées de diverses manières (en tout plus de 100 séries d'expériences). Ainsi, j'ai fait des expériences en partie avec l'appareil à chauffer décrit ci-dessus et qui a servi à toutes les mesures finales, en partie avec un autre appareil et finalement aussi dans l'air libre. Dans certaines expériences, la barre était entourée de coton ou de duvet d'édredon. J'ai chauffé à des températures différentes, faisant varier la résistance intercalée dans le circuit du fil à mesure de 300 à 50 unités de Siemens. Outre les éléments ordinaires de fils de cuivre et d'argenton, j'ai essayé encore des éléments de fils de fer et de cuivre. Comme la force électromotrice des premiers éléments croît quand la température s'élève, tandis que celle des derniers décroît, de manière que les indications de la température obtenues par ces éléments s'écartent en sens inverse de l'échelle ordinaire de température, ces expériences ne sont pas dépourvues d'iuterêt; c'est pourquoi je relaterai plus loin une série d'expériences faites avec des fils de cuivre et de fer. Enfin, j'ai avec les barres de fer, d'argenton et de bismuth, employé seulement des fils de cuivre qui ont été placés dans les trous en relation avec la barre comme éléments thermoélectriques. Je me bornerai ici à remarquer, quant à ces expériences préliminaires, qu'elles n'ont manifesté aucun désaccord essentiel des résultats obtenus.

Une fois terminées ces recherches préliminaires qui m'avaient pris beaucoup de temps, les mesures finales, dont je citerai dans ce qui suit les particularités, purent être exécutées assez rapidement, parce qu'elles ne présentent plus, après quelque exercice acquis, aucune difficulté particulière.

La résistance électrique de toutes les barres a été déterminée immédiatement en mesures absolues à 0° et 100° par la méthode dont je me suis servi antérieurement pour la détermination de la résistance électrique du mercure (voir: Overs. over Vidensk. Selsk. Forh. 1873, p. 67, p. 85 de cette édition) méthode par laquelle les mesures de petites résistances peuvent être exécutées avec facilité et avec exactitude. Pour les mesures en question j'ai remplacé l'aiguille double astatique par le galvanomètre à miroir qui est plus sensible; d'autre part l'aiguille double est moins sensible à l'influence du courant de la grande bobine de l'appareil à mesurer. Cependant, comme cette dernière peut être placée à une distance telle du galvanomètre et dans une direction telle que l'influence devienne imperceptible, et comme on a de plus dans les expériences elles-mêmes le contrôle nécessaire des erreurs produites par là, j'ai préféré le galvanomètre à miroir.

On amenait les barres à la température 0° en les entourant de glace, et à la température 100° en les plaçant dans l'eau bouillante ou dans l'appareil à chauffer (magnésium et aluminium). De plus quelques expériences ont été faites avec des barres placées dans l'air libre à la température du local. Pour une température donnée les résultats étaient les mêmes, que les barres fussent entourées d'eau ou d'air.

Pour ces expériences je me suis servi exclusivement de la bobine extérieure de mon appareil, au moyen de laquelle j'ai en même temps exécuté quelques expériences sur la conductibilité du mercure. Les résultats étaient identiques à ceux que j'avais obtenus antérieurement, et par lesquels j'ai trouvé un résultat inférieur de deux pour cent à celui de la commission de la British Association.

Plus tard M. Rowland (Journal de Silliman, t. XV (1878), p. 281) est parvenu à un résultat intermédiaire entre les deux précédents; mais il faut remarquer que ni M. Rowland, ni aucun autre observateur n'a jusqu'ici déterminé la résistance de conduction du mercure lui-même en mesure absolue, mais seulement la résistance d'étalons de Siemens obtenus par comparaison avec des colonnes de mercure assez minces.

Dans mon mémoire sur la résistance du mercure, cité ci-dessus, j'ai mentionné (p. 100) qu'en fermant et en ouvrant le courant principal pendant les mesures on influait considérablement sur le galvanomètre. J'ai trouvé que ce phénomène, qui alors m'était tout à fait inexplicable, est produit par l'action inductrice de la bobine sur le conducteur qui mène au galvanomètre. Si ce conducteur est placé perpendiculairement aux tours de la bobine, ces phénomènes d'induction disparaissent tout à fait.

La détermination du poids spécifique des métaux a été exécutée à la température ordinaire; j'en ai déduit les poids spécifiques à 0° et à 100° en me servant des coefficients connus de dilatation. Les expériences suivantes furent exécutées avec des pièces longues de 6^{cm}, détachées des barres.

Enfin j'ai encore déterminé la chaleur spécifique à

trois températures différentes de tous les métaux employés. L'appareil à chauffer, monté dans ce but, était composé d'un cylindre de cuivre (hauteur 156^{mm}, diamètre 55^{mm}, qui entourait un tube fixé dans le couvercle (longueur 128^{mm}, diamètre 27^{mm}) et fermé du bas. Le cylindre était rempli d'alcool éthylique ou amylique qu'on a continué à faire bouillir, la vapeur étant condensée dans un alambic, d'où elle repassait, à l'état liquide, dans le cylindre. La petite barre dont on voulait déterminer la chaleur spécifique était placée dans le tube et y était chauffée à la température du point d'ébullition des deux liquides (78° et 131°). Enfin on mettait le même appareil avec la barre dans un mélange réfrigérant de glace et de sel.

Quand la barre avait pris la température constante de l'appareil à chauffer, elle était amenée au moyen d'une manivelle près d'un calorimètre, et y était plongée vitement. Du reste, on a exécuté les mesures comme à l'ordinaire. Comme la température de la chambre était pendant la durée des expériences voisine de 20°, les températures moyennes correspondantes aux chaleurs spécifiques trouvées étaient à peu près 0°, 50°, 75°.

Pour chaque température on a fait au moins deux mesures. Les moyennes trouvées seront indiquées dans ce qui suit.

De ces observations j'ai déduit les chaleurs spécifiques correspondantes à 0° et 100° par les formules

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c + 0{,}45\,\varepsilon - 0{,}30\,\varepsilon' \\ c_{100} &= c + 0{,}20\,\varepsilon + 1{,}20\,\varepsilon' \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

où c, $c+\varepsilon$ et $c+\varepsilon'$ sont les valeurs des chaleurs spécifiques à 0°, 50° et 75° trouvées par les observations.

Ces formules sont calculées par la méthode des moindres carrés, les poids des valeurs trouvées de c, $c+\varepsilon$ et $c+\varepsilon'$ étant après estimation 1, 2 et 3,4.

Dans les tableaux suivants j'ai réuni les résultats de toutes les mesures exécutées comme il a été dit, rangés dans l'ordre des expériences sur la conduction calorifique. ϑ est la température de l'appareil à chauffer, les valeurs de Δ et Σ indiquées dans la première ligne sont les températures constantes au commencement des expériences, mesurées en millimètres sur le fil à mesure. W est la résistance du circuit du fil à mesure. En général la résistance employée a été 102 unités de Simens, résistance pour laquelle 1° C. correspond à 48^{mm} du fil à mesure à 0° et à 58^{mm} à 100°. La première colonne des tableaux contient les moyennes $\frac{\Sigma_m + \Sigma_{m-1}}{2}$ des deux valeurs de Σ observées successivement, la seconde ligne le nombre de secondes (t) écoulées entre ces deux observations. Avec ces deux séries de nombres, on a (troisième colonne) calculé $\frac{\delta \Sigma}{\delta t}$ au moyen de l'équation (8); on obtient ainsi, sauf une petite correction $\frac{\delta \Sigma}{\delta t} = \frac{500}{t}$. La quatrième colonne contient les valeurs observées de Δ. Les trois colonnes suivantes indiquent les valeurs correspondantes trouvées dans la période suivante de refroidissement, pendant laquelle Σ reprend les mêmes valeurs en ordre inverse. Enfin la huitième colonne contient les valeurs de $a t^2$ calculées par l'équation (7), où $l = 2$, et la dernière contient les valeurs $\frac{b}{a} 10^5$ calculées au moyen de la formule

$$\frac{b}{a} = -\frac{\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}}{\Sigma} + \frac{\Delta'}{4a\Sigma}.$$

Il faut remarquer qu'on doit dans le calcul de $\frac{b}{a}$ compter Δ et Σ à partir des points fixes déterminés au commencement des expériences; au contraire ils sont sans importance pour le calcul de a. Comme unités absolues on s'est servi partout ici du gramme comme unité de masse, du centimètre comme unité de longueur et de la seconde comme unité de temps.

Étain.

1. $\vartheta = 6°,0$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1250	153	3,27	45	513	0,99	0	10,56	79
1750	187	2,67	44	376	1,34	1	10,72	82
2250	245	2,05	43	308	1,64	5	10,30	94

2. $\vartheta = 6°,4$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ u. de S.

3250	109	4,59	82	178	2,82	5	10,39	102
3750	116	4,31	85	155	3,23	5	10,61	99
4250	114	4,40	90	141	3,53	9	10,19	105

3. $\vartheta = 8°,2$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -30$, $W = 102$ u. de S.

2250	98	5,10	73	265	1,90	—2	10,71	76
2750	105	4,76	72	213	2,36	—3	10,53	76
3250	114	4,39	70	183	2,74	—3	10,24	75
3750	130	3,85	71	153	3,27	—3	10,39	79
4250	130	3,85	74	147	3,41	0	10,19	80

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = 22$, $\Sigma = 700$, $W = 102$ u. de S.

2250	120	4,17	88	320	1,57	22	11,54	101
2750	135	3,71	90	258	1,95	23	11,84	100
3250	160	3,13	90	214	2,34	25	11,88	[illegible]
3750	216	2,32	87	198	2,53	30	11,75	10[illegible]

5. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -27$, $\Sigma = 1500$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3750	61	8,20	93	218	2,31	−27	11,42	103
4250	68	7,35	97	170	2,95	−27	12,04	108
4750	70	7,14	96	170	2,95	−22	11,70	104

Les trois séries d'expériences 1, 2 et 4 sont exécutées avec des éléments thermoélectriques de fils de cuivre et de fer; les autres et toutes les expériences suivantes avec des éléments de fils de cuivre et d'argenton.

Les séries 1, 2 et 3 donnent comme moyenne

* NOTE 5. $$4a = 10{,}44 \text{ à } 16° \text{ C.*},$$

les séries 4 et 5

$$4a = 11{,}74 \text{ à } 106° \text{ C.}$$

Si l'on en déduit les valeurs correspondantes à 0° et 100°, on obtiendra

$$4a_0 = 10{,}21, \quad 4a_{100} = 11{,}64.$$

Les chaleurs spécifiques observées sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,05368	0,05534	0,05643,

d'où l'on peut calculer au moyen de la formule (9)

$$c_0 = 0{,}05360, \quad c_{100} = 0{,}05731.$$

Les poids spécifiques correspondants à 0° et 100° étaient

$$\delta_0 = 7{,}276, \quad \delta_{100} = 7{,}226,$$

d'où

$$c_0 \delta_0 = 0{,}3900, \quad c_{100} \cdot \delta_{100} = 0{,}4141.$$

Les conductibilités calorifiques à 0° et 100°, k_0 et k_{100} sont donc

$$k_0 = \frac{c_0 \delta_0}{a_0} = 0{,}1528, \quad k_{100} = \frac{c_{100} \delta_{100}}{a_{100}} = 0{,}1423, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}074.$$

Les conductibilités électriques à 0° et 100° sont

$$\varkappa_0 = 9{,}346 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 6{,}524 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}433,$$

d'où

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1635, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2181, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}334.$$

Fer.

1. $\vartheta = 9°{,}8$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 114$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2250	86	5,81	141	553	0,91	2	20,62	40
2750	84	5,95	144	440	1,14	2	20,03	41
3250	90	5,56	144	366	1,37	2	20,50	42
3750	90	5,56	146	308	1,62	2	20,06	43
4250	94	5,32	149	268	1,87	4	20,17	46
4750	99	5,05	151	240	2,08	8	20,06	50

2. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -13$, $\Sigma = 300$, $W = 62$ u. de S.

2750	180	2,78	77	510	0,98	—8	22,60	49
3250	202	2,48	79	393	1,27	—6	22,67	54
3750	238	2,10	79	347	1,44	—2	22,88	56
4250	290	1,72	79	308	1,62	+3	22,75	59

La série 1 donne comme moyenne:

$$4a = 20{,}24 \text{ à } 19° \text{ C.}$$

La série 2 donne comme moyenne

$$4a = 22{,}73 \text{ à } 114° \text{ C.};$$

on en déduit

$$4a_0 = 19{,}74, \quad 4a_{100} = 22{,}34.$$

Les chaleurs spécifiques sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,1050,	0,1107,	0,1136,

d'où

$$c_0 = 0{,}1050, \quad c_{100} = 0{,}1165.$$

De plus on a

$$\delta_0 = 7{,}828, \quad \delta_{100} = 7{,}799,$$
$$c_0\delta_0 = 0{,}8219, \quad c_{100}\delta_{100} = 0{,}9086.$$

Par conséquent

$$k_0 = 0{,}1665, \quad k_{100} = 0{,}1627, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}023.$$

Les conductibilités électriques sont

$$\varkappa_0 = 10{,}374 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 6{,}628 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}565,$$

et par conséquent

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1605, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2455, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}530.$$

Argenton.

1. $\vartheta = 9°{,}6$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 240$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial\Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial\Sigma''}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a}\cdot 10^5$
2750	157	3,18	194	425	1,18	4	43,58	51
3250	167	2,99	193	375	1,33	6	44,29	49
3750	176	2,84	192	340	1.47	8	42,69	47
4250	202	2,48	191	320	1,56	20	42,33	51

2. $\vartheta = 10°{,}3$, $\Delta = 5$, $\Sigma = 100$, $W = 102$ u. de S.

2750	146	3,42	207	442	1,13	13	42,64	50
3250	140	3,57	222	396	1,26	18	42,24	50
3750	159	3,14	221	380	1,32	30	42,83	50

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -29$, $\Sigma = 350$, $W = 102$ u. de S.

3750	73	6,85	269	392	1,28	−15	34,93	49
4250	73	6,85	281	345	1,45	−13	35,42	49
4750	74	6,76	288	275	1,82	−11	34,85	53

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -21$, $\Sigma = 1100$, $W = 102$ u. de S.

3750	276	1,81	94	432	1,16	−13	36,03	52
4250	298	1,68	96	400	1,25	− 7	35,15	52
4750	362	1,38	100	386	1,30	+ 3	36,19	53

Moyenne des séries 1 et 2

$$4a = 42{,}80 \text{ à } 19^\circ \text{ C.}$$

Moyenne des séries 3 et 4

$$4a = 35{,}43 \text{ à } 108^\circ \text{ C.}$$

On en déduit

$$4a_0 = 44{,}37, \quad 4a_{100} = 36{,}09.$$

Les chaleurs spécifiques sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,09153,	0,09292,	0,09401,

d'où

$$c_0 = 0{,}09141, \quad c_{100} = 0{,}09467.$$

On a de plus

$$\delta_0 = 8{,}499, \quad \delta_{100} = 8{,}457,$$

$$c_0\delta_0 = 0{,}7769, \quad c_{100}\delta_{100} = 0{,}8006;$$

par conséquent on a

$$k_0 = 0{,}07004, \quad k_{100} = 0{,}08874, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 0{,}7893.$$

Les conductibilités électriques sont

$$\varkappa_0 = 3{,}766 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 3{,}632 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}037,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1858, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2443, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}314.$$

Cuivre.

1. $\vartheta = 11^\circ{,}2$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 50$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1250	186	2,69	15	985	0,52	1	4,36	64
1750	162	3,09	18	680	0,74	2	4,18	72
2250	156	3,21	22	512	0,98	3	4,54	75
2750	154	3,25	24	406	1,24	4	4,45	79
3250	150	3,34	27	334	1,50	5	4,55	81
3750	156	3,21	29	288	1,74	6,5	4,55	86
4250	153	3,27	32	246	2,04	8,5	4,43	94
4750	150	3,34	35	224	2,23	10,5	4,40	98

2. $\vartheta = 100$, $\Delta = 3$, $\Sigma = 150$, $W = 52$ u. de S.

3250	99	5,05	39	287	1,75	7,5	4,63	88
3750	101	4,95	40	250	2,01	8	4,60	86
4250	107	4,68	41	220	2,28	9	4,60	87

Moyenne de la série 1:

$$4a = 4{,}43 \text{ à } 19^\circ \text{ C.}$$

Moyenne de la série 2:

$$4a = 4{,}61 \text{ à } 117^\circ \text{ C.}$$

On en déduit

$$4a_0 = 4{,}40, \quad 4a_{100} = 4{,}58.$$

Les chaleurs spécifiques sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,08988,	0,09169,	0,09319,

d'où

$$c_0 = 0{,}08970, \quad c_{100} = 0{,}09421.$$

De plus on a

$$\delta_0 = 8{,}827, \quad \delta_{100} = 8{,}783,$$
$$c_0\delta_0 = 0{,}7918, \quad c_{100}\delta_{100} = 0{,}8274.$$

$$k_0 = 0{,}7198, \quad k_{100} = 0.7226, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 0{,}996,$$

$$\varkappa_0 = 45{,}74 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 33{,}82 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}352$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1574, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2137, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}358.$$

Plomb.

1. $\vartheta = 11^\circ{,}0$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -50$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma''}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1750	84	5,95	136	273	1,84	4	16,94	115
2250	86	5,81	140	211	2,38	5	16,48	116
2750	99	5,05	145	175	2,86	8	17,30	118

2. $\vartheta = 12^\circ,1$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma''}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2250	142	3,53	105	210	2,39	5,5	16,81	121
2750	149	3,36	114	174	2,88	8	16,99	122
3250	162	3,09	120	146	3,43	11	16,71	126
3750	183	2,74	129	126	3,97	17	16,68	133

3. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -35$, $\Sigma = 500$, $W = 102$ u. de S.

1750	111	4,51	78	380	1,33	−30	18,49	129
2250	132	3,79	79	263	1,91	−24	18,05	145

4. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -35$, $\Sigma = 630$, $W = 102$ u. de S.

3250	233	2,16	76	112	4,47	−42	17.80	156
3750	273	1,84	84	94	5,32	−44	17.88	155

Moyenne des séries 1 et 2

$$4a = 16{,}84 \text{ à } 19^\circ \text{ C.}$$

Moyenne des séries 3 et 4

$$4a = 18{,}05 \text{ à } 105^\circ \text{ C.}$$

On en déduit

$$4a_0 = 16{,}57, \quad 4a_{100} = 17{,}98.$$

Les chaleurs spécifiques sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,03067,	0,03092,	0,03071,

d'où

$$c_0 = c_{100} = 0{,}03077.$$

De plus on a

$$\delta_0 = 11{,}257, \quad \delta_{100} = 11{,}163$$

$$c_0 \delta_0 = 0{,}3464, \quad c_{100} \delta_{100} = 0{,}3435.$$

$$k_0 = 0{,}08362, \quad k_{100} = 0{,}07642, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}094,$$

$$\varkappa_0 = 5{,}141 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 3{,}602 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}427,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1627, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2122, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}304.$$

Laiton (rouge).

1. $\vartheta = 12°,7$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -42$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2250	110	4,55	70	558	0,90	3	12,29	50
2750	111	4,50	73	406	1,24	4	12,02	56
3250	108	4,63	77	348	1,44	5	11,86	56
3750	114	4,39	80	284	1,76	6	12,03	59

2. $\vartheta = 100$, $\Delta = -14,5$, $\Sigma = -273$, $W = 102$ u. de S.

1750	90	5,56	65	460	1,10	—12	11,56	65
2250	86	5,81	68	318	1,58	—14	11,10	64
2750	83	6,02	72	194	2,58	—21	10,81	65
3250	80	6,25	77	131	3,82	—30	10,63	67

On a dans cette expérience accéléré le refroidissement par un contact de peu de durée avec une barre froide.

Moyenne de la série 1:

$$4a = 12,05 \text{ à } 21° \text{ C.}$$

Moyenne de la série 2:

$$4a = 11,02 \text{ à } 107° \text{ C.}$$

On en déduit

$$4a_0 = 12,29, \quad 4a_{100} = 11,10.$$

Les chaleurs spécifiques sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,08991,	0,09224,	0,09396,

d'où

* NOTE 6. $$c_0 = 0,09005, \quad c_{100} = 0,09396.*$$

De plus on a

$$\delta_0 = 8,395, \quad \delta_{100} = 8,348,$$

$$c_0 \delta_0 = 0,7559, \quad c_{100} \cdot \delta_{100} = 0,7844,$$

$$k_0 = 0,2460, \quad k_{100} = 0,2827, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 0,8704,$$

$$\varkappa_0 = 15,75 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 13,31 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1,183,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1562, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2123, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1,360.$$

Laiton (jaune).

1. $\vartheta = 12^\circ,0$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 173$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3250	65	7,69	143	324	1,56	11	14,27	76
3750	66	7,58	147	264	1,90	16	13,82	86
4250	67	7,46	150	204	2,46	18	13,31	93

2. $\vartheta = 10^\circ,3$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 120$, $W = 102$ u. de S.

2250	304	1,66	44	505	1,00	8	13,53	75

3. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -6$, $\Sigma = 550$, $W = 102$ u. de S.

2750	170	2,94	47	367	1,37	—5	12,05	66
3250	192	2,61	48	307	1,63	—3	12,03	69
3750	226	2,22	48	266	1,88	0	11,71	74
4250	275	1,82	48	255	1,96	4	11,64	76

Moyenne des séries 1 et 2

$$4a = 13{,}73 \text{ à } 20^\circ \text{ C.}$$

Moyenne de la série 3

$$4a = 11{,}86 \text{ à } 107^\circ \text{ C.}$$

On en déduit

$$4a_0 = 14{,}16, \quad 4a_{100} = 12{,}01.$$

Les chaleurs spécifiques étaient

à 0°	à 50°	à 75°
0,08833,	0,09218,	0,09265,

d'où

$$c_0 = 0{,}08876, \quad c_{100} = 0{,}9428.$$

De plus on a

$$\delta_0 = 8{,}140, \quad \delta_{100} = 8{,}090,$$

$$c_0 \delta_0 = 0{,}7225, \quad c_{100} \delta_{100} = 0{,}7627,$$

$$k_0 = 0{,}2041, \quad k_{100} = 0{,}2540, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 0{,}8035,$$

$$\varkappa_0 = 12{,}625 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 11{,}00 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}148,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1617, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2309, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}428.$$

Magnésium.

1. $\vartheta = 10°,9$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 210$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3750	63	7,94	56	153	3,27	2	4,82	104
4250	66	7,58	59	132	3,79	3	4,93	109
4750	63	7,94	61	115	4,35	4	4,64	115

2. $\vartheta = 10°,8$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 50$, $W = 102$ u. de S.

1250	121	4,13	23,5	514	0,99	0	4,59	82
1750	118	4,24	24,5	368	1,37	0	4,37	81
2250	124	4,03	26,5	268	1,88	0,5	4,40	90
2750	132	3,79	28	226	2,22	1	4,51	90
3250	137	3,65	30	190	2,64	2	4,45	97
3750	150	3,34	32	152	3,30	2	4,52	101

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -20$, $W = 102$ u. de S.

2750	184	2,72	28,5	173	2,89	1,5	4,81	114
3250	204	2,45	30	145	3,45	2,5	4,66	121
3750	235	2,13	31,5	124	4,03	3	4,63	123
4250	273	1,83	30,5	122	4,10	4,5	4,38	119

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -2$, $\Sigma = 0$, $W = 52$ u. de S.

3250	81	6,17	44	148	3,38	−2	4,82	104
3750	96	5,21	40,5	125	4,00	−2	4,61	107
4250	129	3,88	38	119	4,20	−1,5	4,89	101
4750	166	3,01	35,5	105	4,76	+1,5	4,38	117

La dernière suite d'expériences est exécutée non par chauffage mais par refroidissement, la barre extérieure n'étant chauffée qu'à 80° environ et étant refroidie dans l'air libre pendant l'expérience. Pour cette raison on avait renversé le courant dans le fil à mesure.

De toutes ces séries d'expériences on a tiré comme moyenne

$$4a = 4,612.$$

Les chaleurs spécifiques étaient

à 0°	à 50°	à 75°
0,2456,	0,2519,	0,2509,

d'où

$$c_0 = c_{100} = 0{,}2503.^*$$ * NOTE 7.

De plus on a

$$\delta_0 = 1{,}739\,, \quad \delta_{100} = 1{,}725\,,$$

$$c\delta = 0{,}4335\,,$$

$$k_0 = k_{100} = 0{,}3760\,,$$

$$\varkappa_0 = 24{,}47 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 17{,}50 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}398\,,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1537, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2149, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}398\,.$$

Aluminium.

1. $\vartheta = 13°{,}7$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3750	61	8,20	72	202	2,48	3,5	6,41	81
4250	63	7,94	73	181	2,76	3,5	6,31	85

2. $\vartheta = 14°{,}0$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ u. de S.

2750	85	5,88	52	303	1,65	2	6,64	71
3250	88	5,68	54	243	2,06	3	6,59	77
3750	94	5,32	55	212	2,36	4	6,64	79
4250	96	5,21	57	164	3,05	4,5	6,35	88
4750	97	5,15	58	180	2,78	7,5	6,37	83

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -15$, $\Sigma = 220$, $W = 102$ u. de S.

3750	94	5,32	41	209	2,37	—11	6,76	84
4250	92	5,43	44	181	2,76	—10	6,59	87
4750	92	5,43	47	167	2,99	— 9	6,65	86

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -5{,}5$, $\Sigma = 320$, $W = 52$ u. de S.

3250	221	2,27	23,5	216	2,32	—5,5	6,32	79
3750	290	1,73	23,5	191	2,62	—5	6,55	79
4250	388	1,30	23	177	2,83	—4	6,54	78

De toutes ces séries d'expériences on a tiré la moyenne

$$4a = 6{,}517.$$

Les chaleurs spécifiques sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,2055,	0,2088,	0,2144,

d'où

$$c_0 = 0{,}2043, \quad c_{100} = 0{,}2168.$$

De plus on a

$$\delta_0 = 2{,}739, \quad \delta_{100} = 2{,}720,$$

$$c_0\delta_0 = 0{,}5596, \quad c_{100}\delta_{100} = 0{,}5897,$$

$$k_0 = 0{,}3435, \quad k_{100} = 0{,}3619, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 0{,}9489,$$

$$\varkappa_0 = 22{,}46 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 17{,}31 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}297$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1529, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2091, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}367.$$

Cadmium.

1. $\vartheta = 13°{,}3$, $\Delta = -1$, $\Sigma = -70$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1250	67	7,46	71	566	0,90	−1	8,61	68
1750	71	7,04	74	396	1,27	−1	9,03	70
2250	71	7,04	76	303	1,66	−1	8,85	72
2750	72	6,94	78	245	2,05	−1	8,79	73
3250	74	6,76	81	200	2,50	−1	8,86	75
3750	74	6,76	85	178	2,81	0	8,88	77
4250	75	6,67	88	156	3,21	+1	8,81	80

2. $\vartheta = 14°{,}7$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 52$ u. de S.

1750	[illegible]	7,35	78	285	1,20	0	9,02	74
2250	74	6,76	78	286	1,75	0	9,16	78
2750	81	6,17	75	228	2,15	0	8,97	80
3250	98	5,10	71	197	2,54	2	9,03	85
3750	123	4,07	67	181	2,76	5	9,08	88

3. $\vartheta = 14°,8$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -40$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1250	88	5,68	58	548	0,93	0	8,77	72
1750	95	5,26	59	378	1,33	0	8,98	74
2250	114	4,39	56	287	1,75	0,5	9,04	78
2750	140	3.57	52	235	2,13	1	8,95	80

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -33,5$, $\Sigma = 1100$, $W = 102$ u. de S.

3250	67	7,46	55	290	1,73	—33,5	9,63	80
3750	60	8,33	62	236	2,12	—33,5	9,14	80
4250	65	7,69	64	196	2,55	—33,5	9,52	81
4750	67	7,46	69	153	3,27	—33,5	9,55	90

5. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -17$, $\Sigma = 550$, $W = 52$ u. de S.

3250	133	3.76	39,5	215	2,33	—17	9,28	86
3750	149	3,36	42,5	185	2,70	—15,5	9,57	89
4250	187	2,67	43	163	3,07	—13	9,76	94

Moyenne des séries 1, 2 et 3

$$4a = 8,927 \text{ à } 24°.$$

Moyenne des séries 4 et 5

$$4a = 9,493 \text{ à } 110°,$$

d'où

$$4a_0 = 8,769, \quad 4a_{100} = 9,427.$$

Les chaleurs spécifiques sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,05562,	0,05643,	0,05607,

d'où

$$c_0 = 0,05585, \quad c_{100} = 0,05632.$$

On a de plus

$$\delta_0 = 8,638, \quad \delta_{100} = 8,556,$$

$$c_0\delta_0 = 0,4824, \quad c_{100}\delta_{100} = 0,4819,$$

$$k_0 = 0,2200, \quad k_{100} = 0,2045, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1,076,$$

$$\varkappa_0 = 14{,}41 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 10{,}18 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}415,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1527, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2009, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}315.$$

Antimoine.

1. $\vartheta = 16^\circ{,}5$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -60$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1750	138	3,63	174	274	1,84	0	31,81	102
2250	162	3,09	179	195	2,57	0	31,63	111
2750	192	2,61	181	165	3,04	2	31,68	112

2. $\vartheta = 15^\circ{,}1$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 180$, $W = 102$ u. de S.

2750	89	5,62	278	156	3,21	0	31,47	125
3250	93	5,38	294	138	3,63	5	32,07	123
3750	100	5,00	304	115	4,35	8	31,64	129
4250	112	4,47	308	107	4,68	16	31,93	127

3. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -2$, $\Sigma = 800$, $W = 102$ u. de S.

3250	133	3,77	257	121	4,14	−15	34,38	154
3750	141	3,56	276	107	4,68	−11	34,84	150
4250	168	2,99	291	90	5,56	− 6	34,73	160
4750	197	2,55	301	87	5,75	+12	34,78	158

Moyenne des séries 1 et 2

$$4a = 31{,}75 \text{ à } 24^\circ.$$

Moyenne de la série 3

$$4a = 34{,}68 \text{ à } 108^\circ.$$

On en déduit

$$4a_0 = 30{,}91, \quad 4a_{100} = 34{,}40.$$

Les chaleurs spécifiques sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,05162,	0,05174,	0,05070,

d'où

$$c_0 = c_{100} = 0{,}05120.^*$$ * NOTE 8.

De plus on a

$$\delta_0 = 6{,}673, \quad \delta_{100} = 6{,}653,$$

$$c_0\delta_0 = 0{,}3417, \quad c_{100}\delta_{100} = 0{,}3406,$$

$$k_0 = 0{,}04421, \quad k_{100} = 0{,}03961, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}116,$$

$$\varkappa_0 = 2{,}199 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 1{,}522 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}445,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 2011, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2603, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}294.$$

Bismuth.

1. $\vartheta = 16°{,}1$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ u. de S.

Σ	t	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$	Δ	t	$-\frac{\partial \Sigma'}{\partial t}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2300	96	5,22	577	180	2,79	14	70,3	130
2800	112	4,47	583	150	3,34	28	71,1	133

2. $\vartheta = 15°{,}8$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ u. de S.

2400	105	4,77	551	178	2,82	12	71,0	125
2900	133	3,77	547	134	3,74	16	70,7	137
3400	181	2,78	528	109	4,60	0	71,5	135
3900	310	1,64	511	88	5,69	—10	71,1	142

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -4$, $\Sigma = 340$, $W = 102$ u. de S.

1900	159	3,16	440	169	2,98	—30	76,5	169
2400	196	2,57	453	126	3,98	—48	77,0	164

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -4$, $\Sigma = 380$, $W = 102$ u. de S.

1900	176	2,85	408	223	2,26	21	75,7	170
2400	244	2,07	421	178	2,82	43	77,3	169
2900	424	1,22	422	152	3,30	70	77,9	166

Moyenne des séries 1 et 2

$$4a = 70{,}95 \text{ à } 25^\circ.$$

Moyenne des séries 3 et 4

$$4a = 76{,}88 \text{ à } 105^\circ.$$

d'où

$$4a_0 = 69{,}10, \quad 4a_{100} = 76{,}51.$$

Les chaleurs spécifiques sont

à 0°	à 50°	à 75°
0,03013,	0,03066,	0,03090

d'où

$$c_0 = 0{,}03014, \quad c_{100} = 0{,}03116.$$

De plus on a

$$\delta_0 = 9{,}746, \quad \delta_{100} = 9{,}707,$$

$$c_0\delta_0 = 0{,}2937, \quad c_{100}\delta_{100} = 0{,}3025,$$

* NOTE 9. $$k_0 = 0{,}01700, \quad k_{100} = 0{,}01581, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}071,^*$$

$$\varkappa_0 = 0{,}9293 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 0{,}6299 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa}{\varkappa_{100}} = 1{,}475,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1830, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2510, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}372.$$

Après avoir achevé toutes ces expériences, qui durèrent de janvier à octobre 1880, j'ai tenu, surtout à cause des résultats des expériences de H. F. Weber (Berichte der Akademie d. W. zu Berlin, 1880, p. 457) qui différaient d'une manière frappante des miens, à répeter la détermination des conductibilités calorifiques des barres par une méthode qui différât tout à fait de celle que j'avais employée en premier lieu. A cette fin, j'ai choisi

la méthode de Forbes: l'observation de la température stationnaire produite en des points différents de la barre par l'échauffement de l'une de ses extrémités et l'observation du refroidissement de la barre par la conduction extérieure après qu'elle a été chauffée à une température uniforme. Comme je voulais en même temps éviter l'emploi de l'appareil à chauffer dont je m'étais servi dans les premières expériences, je me décidai à faire ces expériences dans l'air libre à la température de la chambre, renonçant ainsi à déterminer l'influence de la température sur la conductibilité.

J'ai commencé ces observations par des expériences sur la conduction extérieure apparente: c'est ainsi que j'ai étudié, en partie au moyen de thermomètres, en partie au moyen d'éléments thermoélectriques, le refroidissement dans l'air libre de corps de grandeurs et de formes différentes. Pour le calcul de ces expériences je me suis servi d'abord de la formule de la conduction extérieure, admise récemment, d'après laquelle la quantité de chaleur communiquée par chaque unité de surface est exprimée par $hu(1+\beta u)$, où u est la différence des températures du corps et du milieu ambiant et où h et β sont deux constantes indépendantes de u. Cette formule suffit tant que le refroidissement ne dépasse pas une certaine limite approximativement égale à $\frac{1}{4}u_1$, u_1 étant la valeur de u observée primitivement. Au-dessous de cette limite, les valeurs observées ont fait ressortir un écart régulier avec les valeurs calculées.

Comme cette formule empirique n'était pas, à mon avis, tout à fait satisfaisante, j'ai essayé d'obtenir par des vues théoriques une formule plus acceptable. M. A. Oberbeck a le premier, il n'y a que deux ans, tenté de

développer une théorie de la conduction extérieure de la chaleur (Ann. de Wiedeman, t. VII, p. 271).

Mais, comme cet auteur s'est servi de développements en série suivant les puissances croissantes du coefficient de dilatation de l'air ambiant, il n'a réussi à trouver une solution admissible que dans le cas où l'air ambiant était très raréfié; au contraire la solution pratique proprement dite échappe tout à fait à ses recherches.

Imaginons qu'une plaque, de hauteur H et infiniment large, soit suspendue verticalement et que sa température soit maintenue constante et plus élevée que celle de l'air ambiant. Des courants ascendants se formeront dans l'air ambiant et, si l'on suppose que les courants horizontaux soient ici sans importance, la pression p de l'air sera partout la même dans chaque plan horizontal; au contraire il va sans dire qu'elle variera d'une couche horizontale à l'autre.

Si w est la vitesse verticale de l'air, η le coefficient de frottement intérieur, ρ' le poids spécifique de l'air et g l'accélération de la pesanteur, l'équation du mouvement de l'air, dans les hypothèses que nous faisons, sera:

$$\rho'\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\rho' g - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right). \quad (1)$$

Soient de plus les températures de l'air au point (x, z) et à l'infini $T + \vartheta$ et T degrés, comptés à partir du zéro absolu, et soient c la chaleur spécifique de l'air à pression constante et k sa conductibilité calorifique; l'équation du mouvement de la chaleur sera

$$\rho' c\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) = k\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right). \quad (2)$$

Une partie de cette variation de témpérature est due à la dilatation de l'air ascendant; mais comme l'air n'est refroidi par là que d'un degré pour 100^m ou $0°,0001$ C. par centimètre, cette quantité peut être considérée comme très petite en comparaison des variations produites par les autres conditions.

Si l'on désigne le poids spécifique de l'air à distance infinie de la plaque ($x = \infty$) par ρ, on aura

$$\rho T = \rho'(T+\vartheta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0,$$

et par suite

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho' g = (\rho' - \rho) g = \frac{-\vartheta}{T+\vartheta} \rho g.$$

Si nous ne tenons compte que de la température stationnaire produite par la constance de la température de la plaque, les équations (1) et (2) se réduiront à

$$\frac{\partial w}{\partial z} w = g \frac{\vartheta}{T} + \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{T+\vartheta}{T} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} w = \frac{k}{\rho c} \cdot \frac{T+\vartheta}{T} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right). \tag{4}$$

Dans ces équations on peut, avec une approximation suffisante, considérer les coefficients des derniers termes comme des fonctions de T seulement (au lieu de $T+\vartheta$) c'est-à-dire que ϑ peut être négligé dans ces coefficients.

Dans toute la couche d'air limitée par deux plans horizontaux qui passent par les bords supérieur et inférieur de la plaque, l'air entrera par le plan inférieur avec une vitesse w dépendante de x et s'élévera jusqu'au plan supérieur sans éprouver de variation sensible dans sa vitesse, tandis que la température du même courant

d'air ne diffère au commencement que peu de T, mais se transformera rapidement en une température $T + \vartheta$, qui de même est constante jusqu'au plan horizontal supérieur. Ces suppositions se rapprochent d'autant plus de la réalité que la hauteur H de la plaque est plus grande et que les courants en question sont situés plus près de la plaque; mais, comme tout le caractère du phénomène dépend essentiellement des mouvements et de la température des couches d'air les plus rapprochées de la plaque, on n'introduira pas d'erreur sensible en faisant les mêmes suppositions pour les courants à toutes distances de la plaque.

Les suppositions mathématiques sont donc, que w ne dépend pas de z entre les limites $z = 0$ et $z = H$, mais qu'il est entre ces limites fonction de x seul, tandis que ϑ et $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ sont nuls pour $z = 0$, après quoi $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ croît rapidement et décroît de nouveau jusqu'à 0, de sorte que ϑ ait déjà pour une valeur de z, petite en comparaison de H, une valeur constante qu'il conserve, comme le fait w, jusqu'à $z = H$. A cette dernière limite même on suppose que w et ϑ soient constants.

Si l'on multiplie les équations (3) et (4) par $\frac{dz}{H}$ et qu'on les intègre entre les limites $z = 0$ et $z = H$, on obtiendra par conséquent:

$$0 = g\frac{\vartheta}{T} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$\vartheta w = \frac{H \cdot k}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Comme l'air est en repos, tant au contact immédiat de la plaque qu'à distance infinie d'elle, et comme la

couche d'air voisine de la plaque a la température constante de celle-ci, que nous désignerons par $T + \vartheta_0$, les conditions des équations différentielles correspondantes aux limites seront:

$$\vartheta = \vartheta_0 \quad \text{et} \quad w = 0 \text{ pour } x = 0,$$
$$\vartheta = 0 \quad \text{et} \quad w = 0 \text{ pour } x = \infty.$$

Si l'on pose

$$x = \alpha x', \quad w = \beta w', \quad \vartheta = \vartheta_0 \vartheta',$$

on peut choisir α et β de manière que les équations différentielles prennent la forme

$$0 = \vartheta' + \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad \text{et} \quad \vartheta' w' = \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x'^2}. \tag{7}$$

On doit alors poser

$$\alpha = \sqrt{\frac{\eta k H T}{\rho c \vartheta_0}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{k G H \vartheta_0}{\eta c T}}.$$

Les conditions aux limites se réduiront alors à

$$\vartheta' = 1 \quad \text{et} \quad w' = 0 \text{ pour } x' = 0,$$
$$\vartheta' = 0 \quad \text{et} \quad w' = 0 \text{ pour } x' = \infty.$$

Comme toutes les constantes sont réduites de cette manière à des nombres purs, les intégrales des équations ne contiendront que des coefficients numériques.

Si l'on désigne par L la quantité de chaleur communiquée par seconde et par centimètre carré par conduction à l'air ambiant, on aura:

$$L = -k \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = -k \frac{\vartheta_0}{\alpha} \left(\frac{\partial \vartheta'}{\partial x'}\right)_{x'=0},$$

et, si l'on introduit ici la valeur de α trouvée ci-dessus,

on aura

$$L = N\sqrt[4]{\frac{cgk^3}{\eta HT}} \cdot \sqrt{\rho}\,\vartheta_0^{\frac{5}{4}}, \tag{8}$$

où

$$-\left|\frac{\partial\vartheta'}{\partial x'}\right|_{x'=0} = N$$

est un nombre pur, dont la valeur sera déterminée dans ce qui suit. Pour les gaz parfaits l'expression trouvée de L prendra une forme encore plus simple, car ici $\frac{c\eta}{k}$ ne diffère, comme on sait, que peu de l'unité.

Bien que le résultat trouvé ne soit tiré que de suppositions très élémentaires et qu'il ne puisse pour cette raison être considéré que comme une première approximation, il représente avec une exactitude étonnante les lois de la conduction extérieure de la chaleur (la radiation de chaleur n'y est pourtant pas comprise). Comme on sait, Dulong et Petit (Ann. de chim. et de phys., t. 7, 1817, p. 225—264 et 337—367) ont, de leurs observations de la vitesse de refroidissement de corps différents, déduit qu'elle est proportionelle à $mp^c\vartheta_0^b$, si l'on soustrait la partie dûe à la radiation.

Comme la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la perte de chaleur L, et comme la pression de l'air p est proportionnelle à son poids spécifique ρ, on reconnaît que déjà les formes des résultats trouvés par les expériences et par le calcul sont complètement en concordance. De plus, Dulong et Petit ont trouvé pour tous les gaz proprement dits $b = 1{,}233$, tandisque cet exposant est d'après (8) égal à 1,25, par conséquent approximativement le même. Au contraire ils ont trouvé que c différait un peu pour les différents gaz, à savoir 0,45 pour l'air atmosphèrique, 0,315 pour l'hydrogène,

0,517 pour l'acide carbonique et 0,501 pour l'éthylène, tandis que la formule théorique donne $c = 0,5$ pour tous les gaz. Si l'on tient compte des erreurs commises par ces observateurs à cause de leurs connaissances incomplètes des lois de la conductibilité calorifique des gaz très raréfiés, on doit sur ce point encore considérer la concordance comme satisfaisante.

De plus on a trouvé que les valeurs de la constante m étaient pour l'air, l'hydrogène, l'acide carbonique et l'éthylène, proportionnelles à 1 : 3,46 : 0,956 : 1,33, tandis que les rapports correspondants déduits de (8) sont 1 : 2,46 : 0,85 : 1,07. Mais la remarque faite ci-dessus est aussi valable ici. Par exemple, on trouvera, si l'on se sert de la correction pour l'hydrogène indiquée par Stephan (Berichte der Wien. Acad., t. 79, II, 1879) que le nombre 3,46 doit être remplacé par 3,11, nombre qui déjà est considérablement plus proche de la valeur calculée 2,46.

Enfin Dulong et Petit ont encore trouvé que m était indépendant de la température absolue, ce qui concorde aussi passablement avec (8); car on reconnaîtra, si l'on introduit les coefficients de température de k, η et c trouvés par Winkelmann, Obermayer et E. Wiedemann (voir „Theorie der Gase“ de O. E. Meyer, 1877, p. 101 et 201) que les coefficients de (8) ne varieront que faiblement par la variation de la température absolue (l'air atmosphérique et l'hydrogène —0,14, l'acide carbonique —0,04, l'éthylène 0,13 pour cent pour 1° C.).

L'évaluation numérique de N qui entre dans l'équation (8) rend nécessaire une intégration de l'équation (7). On pose $x' = \log \frac{1}{1-y}$, et on développe ϑ' et w' en

séries suivant les puissances croissantes de y, savoir

$$\vartheta' = 1 - b_1 y + b_2 y^2 + \ldots, \quad w' = a_1 y + a_2 y^2 \ldots$$

Les séries doivent satisfaire aux équations différentielles et aux conditions limites

$$\vartheta' = 1 \text{ et } w' = 0 \text{ pour } y = 0,$$
$$\vartheta' = 0 \text{ et } w' = 0 \text{ pour } y = 1.$$

En tenant compte successivement des termes des séries toujours en nombre croissant, j'ai trouvé les valeurs suivantes de b_1:

$$-1, \quad -0{,}6667, \quad -0{,}5902, \quad -0{,}5642, \quad -0{,}5539 \ldots^*,$$

série qui converge avec grande approximation vers $-0{,}548$.

Mais on a

$$\left[\frac{\partial \vartheta'}{\partial x'}\right]_{x'=0} = \left[\frac{\partial \vartheta'}{\partial y}\right]_{y=0} = b_1 = -N.$$

Par conséquent, on aura

$$N = 0{,}548.$$

Pour l'air atmosphérique à la pression ordinaire à 0° on a de plus, avec les unités admises,

$$g = 981, \quad \rho = 0{,}001294, \quad \eta = 0{,}00019, \quad k = 0{,}00005,$$
$$c = 0{,}238$$

par où l'on obtient

$$L = 0{,}000096\, H^{-\frac{1}{4}} \vartheta_0^{\frac{5}{4}}.$$

Par des expériences dont j'omets ici les particularités, j'ai trouvé pour une plaque carré de laiton, de 11cm de côté,

$$L = 0{,}000125\, H^{-\frac{1}{4}} \vartheta_0^{\frac{5}{4}}.$$

Comme le coefficient va décroître pour une plaque infiniment large, on doit aussi ici considérer la concordance des coefficients observé et calculé comme assez satisfaisante.

Par conséquent, si nous égalons l'exposant b de la formule de Dulong et Petit à $\frac{5}{4}$, et si de plus nous prenons comme point de départ la formule de la perte de chaleur par rayonnement, sans doute plus admissible, introduite par Stephan, la vitesse de refroidissement d'un corps suspendu dans l'air libre sera déterminée par

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{q\sigma}{mc}(T^4 - T_0^4) + \frac{q\lambda}{mc}(T - T_0)^{\frac{5}{4}}, \tag{9}$$

où T et T sont les températures du corps et du milieu ambiant comptées à partir du zéro absolu, m la masse du corps, c sa chaleur spécifique, q sa surface et σ et λ des coefficients constants.

Pour des échauffements plus faibles on peut admettre que le rayonnement est proportionnel à $T - T_0 = \vartheta$, et la formule se réduira alors à

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = h\vartheta(1 + \eta\vartheta^{\frac{1}{4}}), \tag{10}$$

où h et η sont des constantes. Si l'on pose $\vartheta = \vartheta_0$ pour $t = 0$, on en déduira

$$t = \frac{4}{h}\log\frac{\vartheta^{-\frac{1}{4}} + \eta}{\vartheta_0^{-\frac{1}{4}} + \eta}. \tag{11}$$

Pour donner un exemple de l'utilité de cette formule, je citerai une expérience faite avec un cylindre de laiton vernissé et rempli de mercure. La longueur du cylindre, qui était suspendu horizontalement, était $15^{cm},85$

et son diamètre $3^{cm},82$. Sa température a été lue sur un thermomètre divisé en dixièmes de degré. On a trouvé

$\vartheta =$	$12^\circ,9$,	$9^\circ,9$,	$6^\circ,9$,	$2^\circ,4$,	$1^\circ,4$,
$t =$	0,	496,	1207,	3473,	4733 sec.,
t (calc.) $=$	0,	499,	1208,	3470,	4733.

Les valeurs calculées de t correspondent à $h = 0{,}0002463$ et $\eta = 0{,}63$.

On peut encore réduire la formule de la vitesse de refroidissement, lorsque la quantité de chaleur perdue par rayonnement ne constitue qu'une petite partie de la perte totale de chaleur, car on obtiendra dans ce cas

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = l\,\vartheta^{\frac{5}{4}}, \tag{12}$$

formule dans laquelle n'entre qu'une constante l. On en peut déduire

$$t = \frac{4}{l}\left(\vartheta^{-\frac{1}{4}} - \vartheta_0^{-\frac{1}{4}}\right). \tag{13}$$

Cette formule peut d'abord être appliquée à des corps petits, terminés par des surfaces métalliques. Comme exemple de l'influence qu'exerce la grandeur du corps sur le coefficient de la conduction calorifique extérieure, je citerai les résultats suivants de mes expériences. On peut en même temps y trouver une explication des grands écarts qui existent entre les déterminations de ce coefficient faites par différents observateurs.

Les expériences sont exécutées en partie avec des thermomètres, en partie avec des éléments thermoélectriques. Le calcul a été exécuté de manière à déterminer d'abord t, soit par la formule (11) soit par (13),

puis à calculer $\frac{\partial T}{\partial t}$ pour la moyenne T des plus haute et plus basse températures observées. Enfin on a éliminé au moyen de l'équation (9) la partie de la perte de chaleur due au rayonnement. Comme point de départ, je me suis servi de la valeur du coefficient d'émission du verre σ, trouvée par Graetz, $\sigma = 1{,}085 \cdot 10^{-12}$ (Wied. Ann., t. 11, p. 913) j'ai déterminé par des expériences comparatives le rayonnement des autres surfaces employées par rapport au verre. Si l'on prend le coefficient d'émission de celui-ci comme unité, le coefficient du laiton vernissé est d'après ces expériences égal à 0,79, celui du laiton poli égal à 0,11. Pour toutes les surfaces complètement métalliques et polies, on a trouvé presque le même coefficient; l'antimoine et le bismuth sont pourtant des exceptions remarquables, car ils émettent une quantité de chaleur trois à quatre fois plus grande que les autres métaux. En ce qui concerne la barre d'antimoine, on peut peut-être trouver une explication dans sa surface poreuse, mais la brunissure de la barre de bismuth n'était pas sensiblement différente de celle des autres barres.

Par ces expériences j'ai trouvé les valeurs suivantes du coefficient λ (équation (9)) de conduction extérieure:

Pour des cylindres suspendus horizontalement:

1. Diamètre $3^{cm},82$, longueur $15^{cm},85$, $\lambda = 0{,}000069$,
2. Diamètre $1^{cm},5$, longueur $23^{cm},8$, $\lambda = 0{,}000090$,
3. Diamètre $0^{cm},46$, longueur $80^{cm},0$, $\lambda = 0{,}000166$.

Pour des sphères:

1. Diamètre $10^{cm},64$ ..... $\lambda = 0{,}000055$,
2. Diamètre $4^{cm},74$ ..... $\lambda = 0{,}000074$.

Comme je n'avais en vue que de constater la grande

influence de la dimension des corps sur le coefficient λ, je n'ai pas poussé ces expériences plus loin.

Les deux sphères étaient creuses et les expériences ont été faites tant avec les sphères vides qu'avec les sphères remplies de mercure. De même, j'ai fait des expériences avec un fragment d'une barre de laiton, long de 6^{cm}, et je les ai répétées après avoir creusé le fragment et après l'avoir fermé avec un bouchon de laiton. Bien qu'on ait, de cette manière, obtenu des vitesses de refroidissement très différentes, la surface étant la même, je n'ai pu apprécier aucune variation dans la conduction calorifique extérieure. Ce résultat est important pour toutes les expériences sur la conduction intérieure des métaux, car on suppose toujours que la perte de chaleur à l'extérieur est la même à la même température, que la température du corps chauffé soit constante ou qu'elle soit variable. Cette question ne peut être tranchée que par l'expérience, car il est bien possible théoriquement que la vitesse de refroidissement influe sur la conduction extérieure. On peut, par exemple, imaginer qu'un corps chauffé, entouré d'un corps mauvais conducteur, soit refroidi tellement vite, par exemple par le passage d'un courant d'eau froide à son intérieur, qu'il puisse même recevoir de la chaleur du milieu extérieur, que précédemment il échauffait.

Si le corps se trouvait dans l'air, un courant d'air plus fort se produirait en même temps, ce qui aurait l'effet contraire.

Après avoir achevé ces expériences préliminaires, toutes mes barres, à l'exception de la barre de magnésium, furent par galvanisation couvertes d'une couche de nickel. Comme malheureusement la barre d'antimoine

s'était brisée lors du polissage sur le tour, et comme la barre d'étain était devenue trop courte par les expériences antérieures, je n'ai retenu que neuf barres pour les expériences ultérieures.

Ces expériences furent exécutées de la manière suivante. Le bout de la barre fut placé dans le même appareil à chauffer qui, antérieurement, a servi à déterminer la chaleur spécifique. L'appareil était rempli d'alcool, et on a toujours maintenu la température d'ébullition de l'alcool. La barre était placée en position horizontale à peu près à 3 centimètres au dessus de la table et bien abritée par des écrans contre les courants d'air et contre le rayonnement de l'appareil à chauffer. Au bout d'environ cinq heures, quand la température était devenue stationnaire, on a successivement mesuré la température des différents trous de la barre avec un seul élément thermoélectrique composé d'un fil d'argenton épais de $0^{mm},2$ et d'un fil de cuivre épais de $0^{mm},1$. Le procédé était donc le même que celui dont on s'était servi auparavant; quand on intercalait dans le circuit du fil à mesure une résistance de 112 u. de S., $57^{mm},7$ correspondaient à la température ordinaire à 1° C. Les bouts des fils de l'élément thermoélectrique étaient dans ces expériences placés l'un à côté de l'autre, et ils étaient soudés par la pointe. Les deux fils étaient isolés jusqu'à la soudure, et, quand l'élément était placé dans un trou, la soudure se trouvait sur l'axe de la barre. Une petite goutte d'huile était d'avance introduite dans chaque trou. Les deux autres bouts de l'élément étaient en relation avec le fil conducteur du galvanomètre et le fil à mesure, et les deux communications s'opéraient au moyen de deux verres à mercure placés sur la table.

Après avoir mesuré les températures des trous, on a ôté la barre de l'appareil à chauffer et elle a été chauffée uniformement à une température considérablement plus élevée que celle à laquelle les expériences suivantes devaient être executées. Quand la température de la barre se rapprocha de ce point pendant le refroidissement suivant, la barre, qui était suspendue en position horizontale au moyen de deux cordons de soie, fut amenée à l'endroit où étaient exécutées les premières mesures et où tout était sans changement, sauf que la barre était à présent en dehors de l'écran de l'appareil à chauffer et que l'ouverture produite par là dans l'écran était fermée. Du reste la lampe sous l'appareil à chauffer était continuellement allumée. L'élément thermoélectrique fut introduit dans un des trous de la barre et l'on a observé les instants où la température passait devant certains points fixes du fil à mesure.

On reconnaîtra par ce qui suit que la formule (13) à une seule constante suffit complètement au calcul de ces expériences sur le refroidissement. Si l'on désigne la température indiquée en unités du fil à mesure par u, nous aurons donc pour ces expériences sur le refroidissement

$$t = \frac{4}{l}\left(u^{-\frac{1}{4}} - u_0^{-\frac{1}{4}}\right), \tag{14}$$

tandis que l'équation différentielle correspondante aux premières expériences à température stationnaire devient

$$\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = l' u^{\frac{5}{4}}, \tag{15}$$

où comme précédemment $a = \frac{c\delta}{k}$. La constante l' est à la constante l de l'équation précédente comme la sur-

face courbe de la barre est à sa surface totale, par conséquent $l' : l = 1 : \left(1 + \frac{d}{2L}\right)$, si d est le diamètre de la barre et L sa longueur.

Les trous dont on a mesuré la température se trouvaient à des distances de 1^{cm}, 3^{cm}, 5^{cm} ... du bout libre de la barre. Les températures mesurées sont désignées par u_1, u_3, u_5 ....

Concevons que la barre soit allongée juste assez pour que sa surface courbe soit augmentée de l'aire des surfaces extrêmes, et qu'à présent les surfaces extrêmes soient imperméables à la chaleur: la perte de chaleur à l'extérieur sera à peu près la même que précédemment. Si cet allongement est désigné par ε, on aura par conséquent $\varepsilon = \frac{1}{4} d = 0{,}375$, puisque $d = 1^{cm}{,}5$ pour toutes les barres. Par conséquent nous pouvons admettre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = -\varepsilon,$$

si l'origine du système de coordonnées est situé sur la surface extrême de la barre réelle.

De l'équation (15) on peut déduire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a l' \int_{-\varepsilon}^{x} u^{\frac{5}{4}} dx,$$

et puis

$$\int_{2n-1}^{2n+1} \frac{\partial u}{\partial x} dx = u_{2n+1} - u_{2n-1} = a l' \left[2 \int_{-\varepsilon}^{2n+1} u^{\frac{5}{4}} dx + \int_{2n-1}^{2n+1} u^{\frac{5}{4}} (2n-1-x) dx \right].*$$

* NOTE 11.

Si l'on remplace les dernières intégrations par des sommations, on aura avec grande approximation

$$u_{2n+1} - u_{2n+1} = 4 a l' \left[s_{2n-1} + \frac{1}{12} \left(u_{2n+1}^{\frac{5}{4}} - u_{2n-1}^{\frac{5}{4}} \right) \right]$$

ou

$$s_{2n-1} = s_1 + u_3^{\frac{5}{4}} + u_5^{\frac{5}{4}} \ldots u_{2n-1}^{\frac{5}{4}}, \quad s_1 = (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon) u_1^{\frac{5}{4}}.$$

Si l'on pose successivement $n = 1, 2 \ldots m$ on tirera de là par sommation

$$u_{2m+1} - u_1 = 4al' S_{2m-1},$$

ou

$$S_{2m-1} = s_1 + s_3 + \ldots + s_{2m-1} + \frac{1}{12}\left(u_{2m+1}^{\frac{5}{4}} - u_1^{\frac{5}{4}}\right).$$

Je citerai dans ce qui suit les quantités observées par les expériences et je montrerai comme exemple, par les expériences faites avec la barre de plomb, de quelle façon j'ai exécuté le calcul.

Plomb.

Température du local: $\vartheta = 3^{\circ},1$ C.
Résistance du circuit du fil a mesure: $W = 112$ u. de S.
Longueur de la barre: $L = 23^{cm},7$.

1) L'expérience sur l'échauffement à température stationnaire a donné les températures suivantes correspondantes u_1, u_3 ...

$$u = 315, 324, 340, 364, 399, 439, 489, 558^{mm}.$$

Le calcul a été exécuté d'après le tableau suivant:

	u	$u^{\frac{5}{4}}$	s	S	$4al'$
1	315	1327	1576	1580	0,0057
3	324	1375	2951	4538	0,0055
5	340	1460	4411	8960	0,0055
7	364	1590	6001	14977	0,0056
9	399	1783	7784	22780	0,00544
11	439	2009	9793	32597	0,00534
13	489	2300	12093	44724	0,00543
15	558	2712			
	708			130156	0,005440

La première colonne indique en centimètres la distance observée du trou au bout de la barre. Les colonnes suivantes indiquent u_1, u_3 ..., $u_1^{\frac{5}{4}}$, $u_3^{\frac{5}{4}}$ ... et la dernière colonne contient les quotients $\frac{u_3-u_1}{S_3}$, $\frac{u_5-u_1}{S_5}$ ... qui indiquent les valeurs de $4al'$ correspondantes aux températures successives observées u_3, u_5. La valeur finale de cette quantité est déterminée par le quotient

$$\frac{u_1+u_3 \ldots u_{15}-8u_1}{S_1+S_3+\ldots+S_{13}} = \frac{708}{130156} = 0{,}005440 = 4al'.$$

2) Dans l'expérience sur le refroidissement, exécutée immédiatement après, on a trouvé:

$$\begin{aligned} u &= 600,\ 500,\ 400,\ 300^{\text{mm}}, \\ t &= 0,\ \ 114,\ 264,\ 463 \text{ sec.}, \\ t\,(\text{calc.}) &= 0,\ \ 114,\ 261,\ 463 \text{ sec.} \end{aligned}$$

Le calcul de t est fait au moyen de l'équation (14), où $l = 0{,}0003304$. A cette valeur correspond $l' = 0{,}0003203$; par conséquent on aura $4a = \frac{0{,}005440}{0{,}0003203} = 16{,}98$ à 10° C. environ.

Les expériences exécutées d'après la première méthode ont donné $4a = 16{,}84$ à 19° C. environ.

Laiton (rouge) $\vartheta = 2°{,}2$, $W = 62$ u. de S. $L = 23{,}8$.

1) $u = 366,\ 372,\ 378,\ 386,\ 400,\ 419,\ 438,\ 461^{\text{mm}}$, d'où $4al' = 0{,}001974$.

2)
$$\begin{aligned} u &= 600,\ 500,\ 400,\ 300^{\text{mm}}, \\ t &= 0,\ \ 237,\ 549,\ 971 \text{ sec.}, \\ t\,(\text{calc.}) &= 0,\ \ 239,\ 547,\ 970 \text{ sec.} \end{aligned}$$

$l = 0{,}0001576$, $l' = 0{,}0001528$, $4a = 12{,}92$ à 16° C. (d'après les expériences précédentes 12,05 à 21°).

Argenton. $\vartheta = 2°,9$, $W = 62$ u. de S. $L = 23,8$.

1) $u = 361, 377, 396, 434, 488, 545, 635^{mm}$,

* NOTE 12. d'où $4al' = 0,006836$. *

2) $u = 600, 500, 400, 300^{mm}$,

$t = 0, 237, 539, 955$ sec.,

t (calc.) $= 0, 236, 539, 956$ sec.

$l = 0,0001600$, $l' = 0,0001551$, $4a = 44,07$ à 17° (d'après les expériences précédentes 42,80 à 19°).

Cadmium. $\vartheta = 3°,4$, $W = 62$ u. de S. $L = 23,8$.

1) $u = 368, 372, 380, 392, 409, 429, 454$,

* NOTE 13. d'où $4al' = 0,002272$. *

2) $u = 600, 500, 400, 350, 300, 250, 200$,

$t = 0, 138, 326, 439, 578, 743, 961$,

t (calc.) $= 0, 142, 325, 439, 576, 745, 962$.

$l = 0,0002656$, $l' = 0,0002575$, $4a = 8,82$ à 17° (d'après les expériences précédentes 8,927 à 24°).

Cuivre. $\vartheta = 4°,3$, $W = 62$ u. de S. $L = 23,8$.

1) $u = 331, 331, 333, 337, 342, 347, 352, 359$,

* NOTE 14. d'où $4al' = 0,000656$. *

2) $u = 600, 500, 400, 350, 300, 250$,

$t = 0, 251, 592, 805, 1047, 1358$,

t (calc.) $= 0, 259, 592, 801, 1050, 1358$,

$l = 0,0001456$, $l' = 0,0001412$, $4a = 4,65$ à 16° (d'après les expériences précédentes 4,43 à 19°)

Laiton (jaune). $\vartheta = 3°,2$, $W = 62$ u. de S. $L = 25,2$.

1) $u = 341, 345, 353, 365, 380, 400, 424, 450$

d'où $4al' = 0,002420$.

2) $u = 600, 500, 400, 300,$
$t = 0, 237, 538, 962,$
t (calc.) $= 0, 236, 539, 956,$

$l = 0{,}0001600$, $l' = 0{,}0001553$, $4a = 15{,}58$ à 17° (d'après les expériences précédentes 13,73 à 20°).

Bismuth. $\vartheta = 1°{,}6$, $W = 112$ u. de S. $L = 21{,}4$.

1) $u = 127, 138, 163, 202, 255, 329, 439,$
d'où $4al' = 0{,}02323$.

2) $u = 500, 400, 300, 250, 200,$
$t = 0, 130, 317, 442, 601,$
t (calc.) $= 0, 134, 318, 442, 601,$

$l = 0{,}0003624$, $l' = 0{,}0003501$, $4a = 66{,}35$ à 7° (d'après les expériences précédentes 69,10 à 0°).

Fer. $\vartheta = 4°$, $W = 62$ u. de S. $L = 23{,}7$.

1) $u = 348, 354, 364, 378, 396^*, 418, 444{,}5^*, 476,$
d'où $4al' = 0{,}002793$.

2) $u = 450, 400, 350, 297,$
$t = 0, 184, 409, 677,$
t (calc.) $= 0, 185, 402, 678,$

$l = 0{,}0001400$, $l' = 0{,}0001357$, $4a = 20{,}58$ à 18° (d'après les expériences précédentes 20,24 à 19°).

Des valeurs de l' trouvées pour les différentes barres par les expériences sur le refroidissement on tire, en multipliant par $\frac{d}{4} c\delta$, où d est le diamètre de la barre, c sa chaleur spécifique, δ son poids spécifique, la quan-

---

* Ces deux températures des deux trous ne sont pas observées à cause du bouchage des trous, mais calculées par interpolation.

tité de chaleur correspondante à $u = 1$ qui est cédée aux environs par seconde, et par centimètre carré.

Si la température du corps dépasse de 1° C. celle des environs, cette quantité de chaleur sera égale à $l' \cdot \frac{d}{4} c\delta \cdot 57{,}7^{\frac{1}{4}}$ pour $W = 112$ u. de S. et $l' \frac{d}{4} c\delta \cdot 31{,}94^{\frac{1}{4}}$ pour $W = 62$ u. de S.

Les coefficients de la perte extérieure de chaleur calculés de cette manière sont pour les différents, métaux nickelés rangés par ordre de grandeur:

Plomb	0,000114,	Bismuth	0,000106,
Cadmium	0,000111,	Laiton (rouge) . .	0,000103,
Aluminium	0,000109,	Laiton (jaune) . .	0,000100,
Étain	0,000109,	Cuivre	0,000100,
Argenton	0,000107,	Fer	0,000099.

La concordance de ces nombres doit être considérée comme satisfaisante, en partie parce que les expériences ne sont pas faites dans des conditions extérieures complètement identiques, en partie parce que les surfaces nickelées n'étaient pas tout à fait les mêmes.

La barre de plomb, par exemple, avait évidemment la plus mauvaise brunissure. Avant tout les résultats font voir que les coefficients ne sont pas rangés d'après les vitesses de refroidissement des barres, car par exemple la barre de bismuth, qui a la plus grande vitesse de refroidissement, est ici placée au milieu de la série; et ces expériences donnent une confirmation du fait que la vitesse de refroidissement elle-même n'influe pas sensiblement sur la conduction extérieure de chaleur.

En ce qui concerne la détermination de a et par là de la conductibilité calorifique des métaux, je considère

la concordance avec les expériences antérieures comme satisfaisante pour toutes les barres, à l'exception de l'une des barres de laiton. Je considère pourtant la première méthode comme la plus exacte pour toutes les barres, à l'exception de la barre de bismuth pour laquelle les résultats trouvés ont rendu nécessaire une correction, qui, d'après le calcul, devait diminuer la valeur trouvée pour a de 10 pour cent environ.

Comme les dernières expériences ne donnent pourtant qu'une valeur inférieure de 4 pour cent, je crois que la correction ne doit pas être plus grande.

Le tableau ci-dessous indique les conductibilités calorifiques et électriques trouvées par la première méthode; la conductibilité calorifique du bismuth est toutefois augmentée de 4 pour cent.

	k_0	k_{100}	$\varkappa_0 \cdot 10^5$	$\varkappa_{100} \cdot 10^5$	$\frac{k_0}{\varkappa_0}$	$\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0}$
Cuivre	0,7198	0,7226	45,74	33,82	1574	1,358
Magnésium . .	0,3760	0,3760	24,47	17,50	1537	1,398
Aluminium . .	0,3435	0,3619	22,46	17,31	1529	1,367
Laiton (rouge)	0,2460	0,2827	15,75	13,31	1562	1,360
Cadmium . . .	0,2200	0,2045	14,41	10,18	1527	1,315
Laiton (jaune)	0,2041	0,2540	12,62	11,00	1617	1,428
Fer	0,1665	0,1627	10,37	6,628	1605	1,530
Étain	0,1528	0,1423	9,346	6,524	1635	1,334
Plomb.	0,0836	0,0764	5,141	3,602	1627	1,304
Argenton . . .	0,0700	0,0887	3,766	3,632	1858	1,314
Antimoine . .	0,0442	0,0396	2,199	1,522	2011	1,294
Bismuth . . .	0,0177	0,0164	0,929	0,630	1900	1,372

Si l'on compare les résultats trouvés ici avec les déterminations faites par d'autres observateurs des conductibilités calorifiques des métaux en mesures absolues, on constatera de grands écarts. Cela ressort précisément avec évidence de la comparaison avec les plus récentes mesures de Tait (Trans. Roy. Soc. of Edinb. 1878, p. 717)

et de H. F. Weber (Monatsber. der Akad., Berlin 1880, p. 457), qui tous deux ont déterminé aussi la conductibité électrique. Weber trouve, par exemple, que le rapport des conductibilités calorifique et électrique est pour le cuivre à 0° égale à 2007 et pour le bismuth à 1288, tandis que j'ai trouvé pour le cuivre 1574 (d'après la seconde série d'expériences 1500) et pour le bismuth 1900. Cependant comme ces deux observateurs ont déclaré que leurs résultats n'étaient que provisoires, je ne rechercherai pas ici les causes de ces écarts.

Du tableau ci-dessus résulte:

1) Une confirmation de la loi de Wiedemann et Franz, en ce qui concerne les métaux assez bon conducteurs, car le rapport des conductibilités calorifique et électrique est ici à peu près constant tant à 0° qu'à 100°. Pour les métaux relativement mauvais conducteurs, ce rapport croît beaucoup, lorsque la conductibilité décroît, de sorte qu'ils servent de cette manière de transition aux corps non métalliques, où, comme on sait, la conductibilité calorifique ne diminue pas, beaucoup s'en faut, autant que la conductibilité électrique. La cause peut en être dans leur plus grande transparence et leur plus grand pouvoir émissif; et, en ce qui concerne le dernier point, il faut bien remarquer que tant l'antimoine que le bismuth se signalent tous deux par des pouvoirs émissifs remarquablement grands. Du reste, il est bien possible que les forces thermoélectriques fort prononcées du laiton, de l'antimoine et du bismuth contribuent à une plus facile propagation de la chaleur.

2) Le rapport $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0}$ est, peu s'en faut, le même pour tous les métaux, à l'exception du fer, et à peu près égal au rapport 1,367 des températures absolues correspon-

dantes à 100° et 0°. On aura par conséquent, si les conductibilités à la température T sont désignées par k et $\varkappa$:

$$\frac{k}{\varkappa} = T \times \text{constante}.$$

Cette loi est, à ce qu'il me semble, valable d'une façon plus générale que la précédente, car l'argenton, l'antimoine et le bismuth se comportent par rapport à elle comme les autres métaux. Très étonnant est le grand accroissement de la conductibilité calorifique par l'élévation de la température dans les alliages, comme le laiton et l'argenton, en même temps que la variation de la conductibilité électrique est tout à fait irrégulière, car son décroissement est beaucoup plus petit que chez les autres métaux. Il en est de même à un moindre degré pour l'aluminium.

J'ai déjà, en 1872, dans les Vidensk. Selsk. Overs. (Détermination du dégré de chaleur en mesures absolues, p. 54) énoncé cette suppositiou:

„Le rapport de la conductibilité calorifique d'un métal pur à sa conductibilité électrique est proportionnel à la température comptée du zéro absolu". L'admissibilité de cette supposition est donc confirmée et les expériences ont fait ressortir que la loi peut être étendue aux alliages. En ce qui concerne ses conséquences, je ne peux que renvoyer au mémoire cité; il faut pourtant remarquer que la valeur du rapport des deux conductibilités déterminée par les observations connues jusqu'alors était trop grande.

Il ne sera peut-être pas dépourvu d'intèrêt de chercher à faire un pas en avant dans la théorie.

Imaginons qu'on fasse l'expérience suivante: qu'un

fil de métal soit coupé en un grand nombre de petits fragments de même longueur l, et qu'un autre fil de métal soit aussi coupé en fragments d'une autre longueur l'; que ces pièces soient soudées alternativement et qu'elles soient intercalées dans un circuit électrique.

Par l'effet du courant il se produira, d'une part un développement de chaleur dans le fil total, d'autre part un développement de chaleur dans une moitié des soudures et une absorption de chaleur dans l'autre. Soient T_0 la température stationnaire finale des premières soudures, T'_0 celle des dernières.

Dans les soudures se produisent de plus des forces thermoélectriques qui, d'après la théorie mécanique de la chaleur, peuvent être exprimées exactement par $-ET_0$ et ET'_0, où E est une constante, si l'on suppose pour les deux métaux qu'aucune différence thermoélectrique ne préexiste entre deux points du même métal chauffés à des températures différentes. Par le passage du courant électrique par deux soudures successives le potentiel électrique sera donc diminué de $E(T_0 - T'_0)$. De plus la résistance de conduction des deux fragments de fil mêmes diminuera le potentiel; mais on peut supposer les fragments de fil tellement courts que cette perte soit négligeable.

Dans les mêmes hypothèses les températures T et T' d'un point de l'un des fragments l ou l' peuvent être exprimées par

$$T = T_0 + ax + bx^2, \quad T' = T'_0 + a'x + b'x^2,$$

x étant compté de la soudure la plus proche à gauche du fragment considéré. Les constantes doivent satisfaire aux équations

$$T'_0 = T_0 + al + bl^2, \quad T_0 = T'_0 + a'l' + b'l'^2,$$

car l'extrémité d'un fragment doit avoir la même température que l'origine du suivant.

De plus les soudures rendront la même quantité de chaleur qu'elles recoivent. Les soudures doivent, d'après la théorie mécanique de la chaleur, recevoir par le passage du courant une quantité de chaleur égale à $AiET_0$ et $-AiET'_0$, si A est l'équivalent calorifique du travail et i l'intensité du courant. Soient de plus k et k' les conductibilités calorifiques des deux fragments de fil, q leur section droite: on aura

$$AiET_0 = -kq\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{x=0} + k'q\left[\frac{\partial T'}{\partial x}\right]_{x=l'},$$

$$-AiET'_0 = -k'q\left[\frac{\partial T'}{\partial x}\right]_{x=0} + kq\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{x=l}.$$

En retranchant ces deux équations et introduisant les valeurs de T et T' indiquées ci-dessus, on obtiendra, après avoir éliminé a, b, a', b'

$$AiE(T_0 + T'_0) = 2q(T_0 - T'_0)\left(\frac{k}{l} + \frac{k'}{l'}\right).$$

La perte de potentiel produite par le passage du courant par deux soudures successives sera donc

$$E(T_0 - T'_0) = AiE^2 \frac{T}{q\left(\frac{k}{l} + \frac{k'}{l'}\right)},$$

où $\overline{T} = \frac{T_1 + T'_0}{2}$ est la température moyenne des soudures.

On reconnaît par là que les forces thermoélectriques prises séparément produiront une résistance qui dépendra des lois ordinaires de la résistance de conduction élec-

trique, car cette résistance produirait la perte de potentiel $i\frac{l+l'}{q\bar{\varkappa}}$, si l'on désigne la conductibilité électrique apparente du fil par $\bar{\varkappa}$. Le fil se comportera dans le cas en question comme si la conductibilité était

$$\bar{\varkappa} = \frac{\left(\frac{k}{l}+\frac{k'}{l'}\right)(l+l')}{AE^2\bar{T}}.$$

Nous nous représenterons de plus que le même fil était chauffé à l'un de ses bouts et refroidi à l'autre, sans être parcouru par aucun courant, et qu'il était du reste entouré de corps complètement isolants pour la chaleur. On aura alors, si les températures de trois soudures successives sont T_0, T_1, T_2

$$k\frac{T_0-T_1}{l} = k'\frac{T_1-T_2}{l'} = \bar{k}\frac{T_0-T_2}{l+l'},$$

où $\bar{k}$ désigne la conductibilité calorifique qu'on devrait attribuer au fil, s'il était considéré comme un conducteur homogène. Il s'ensuit que

$$\bar{k} = \frac{l+l'}{\frac{l}{k}+\frac{l'}{k'}} \quad \text{et} \quad \frac{\bar{k}}{\bar{\varkappa}} = \frac{AE^2\bar{T}}{\left(\frac{k}{l}+\frac{k'}{l'}\right)\left(\frac{l}{k}+\frac{l'}{k'}\right)}.$$

La dernière équation fournit donc le rapport que donneraient les expériences pour les conductibilités apparentes, calorifique et électrique, du fil considéré.

L'intérieur d'un corps quelconque est toujours discontinu. Il y a des surfaces limites intérieures où l'on doit supposer la production de forces thermoélectriques, ou, d'après une manière plus moderne d'envisager les phénomènes, de couches électriques doubles. Un cou-

rant électrique produira donc par son passage dans un tel corps les mêmes résultats que dans les expériences fictives décrites ci-dessus. Une résistance de conduction électrique proprement dite ne sera, ici comme là, d'aucune conséquence en comparaison de la résistance produite par le passage par les couches électriques doubles et l'on n'aura, à vrai dire, aucune raison d'admettre qu'il existe aucune autre résistance. L'électricité se mouvra donc librement sans perte de potentiel le long d'une couche double et une variation de potentiel ne se produira que par le passage de l'électricité par une telle couche.

De plus on n'aura pas de raison pour admettre une conduction calorifique proprement dite, car toutes les différences de température seront réparties par des courants électriques locaux. De même que la chaleur se propage comme chaleur rayonnante par des courants locaux alternatifs de la même espèce que les courants produits par la décharge d'une bouteille de Leyde par un fil de métal, de même la chaleur se propage par conduction par des courants locaux de la même espèce que les courants produits par la décharge d'une pile galvanique.

Imaginons qu'une ligne traverse un corps et que cette ligne coupe trois couches successives. Soient A, B, C les points d'intersection et l et l' les distances de A à B et de B à C. Soit T'_0 la température de A et de C, T_0 la température de B. A cause des différences de température des circuits, des courants locaux se produiront, qui vraisemblablement amèneront en moyenne des quantités égales de chaleur de B à A et de B à C. Si l'on suppose que ce transport de chaleur est produit

par la conduction calorifique et si l'on désigne la conductibilité entre A et B par k, entre B et C par k', les quantités de chaleur transportées de B à A ou à C seront proportionnelles à $k\frac{T_0 - T'_0}{l}$ et $k'\frac{T_0 - T'_0}{l'}$. Si ces quantités sont égales d'après notre raisonnement ci-dessus, on aura

$$\frac{k}{l} = \frac{k'}{l'}.$$

Par là l'expression trouvée ci-dessus du rapport des conductibilités calorifique et électrique se réduira à

$$\frac{\bar{k}}{\bar{\varkappa}} = A\left(\frac{E}{2}\right)^2 \bar{T}.$$

Ce rapport est donc proportionnel à la température absolue du corps, ce qui concorde avec les résultats des expériences. Ces expériences ont de plus fait ressortir que ce rapport est le même pour tous les métaux assez bons conducteurs, d'où l'on déduit que E a la même valeur pour tous ces métaux. Le calcul numérique donne $E = 30400$. La différence potentielle ET, que nous nommerons la différence potentielle moléculaire, devient d'après ces suppositions par exemple 23 fois plus grande que celle qui est produite par le contact du cuivre et du laiton.

Comme l'expérience montre que la différence potentielle moléculaire est la même pour les différents corps et proportionnelle à la température absolue, il est naturel de considérer cette différence potentielle comme identique avec la température absolue. On obtiendra de cette manière une mesure absolue des degrés de chaleur, et 1° C. sera égal à 30400 unités absolues.

J'ai, dans mon mémoire cité ci-dessus, appelé l'attention sur ce fait que le courant électrique produit par une différence potentielle $P_1 - P_0$ ne peut produire qu'une certaine différence de température. Si la température du corps est T_0 et si T_1 est la plus haute température à laquelle le corps puisse être amené par le courant, on aura, si l'on introduit la mesure absolue proposée ci-dessus, $P_1 - P_0 = T_1 - T_0$. Par conséquent, si la température est considérée comme une différence potentielle moléculaire, on pourra dire qu'un corps parcouru par un courant électrique ne pourra recevoir de ce courant une différence potentielle moléculaire plus grande que celle qu'il avait auparavant, augmentée de la valeur numérique de la plus grande différence potentielle électrique entre deux points de sa surface.

Si l'on admet que la force électromotrice d'un élément de Daniell soit égale à $11 \cdot 10^7$ unités absolues, la plus grande élévation de température produite par un tel élément sera de même $11 \cdot 10^7$ unités absolues, ou $\frac{11 \cdot 10^7}{30400} = 3600°$ C.

Dans mon mémoire antérieur, j'avais trouvé un nombre moindre, savoir 2780° C. à cause des observations incomplètes faites jusqu'alors. De même la conception de la relation, que je pensais alors avoir trouvée entre les lois de l'électrolyse, de la chaleur spécifique et des conductibilités électrique et calorifique doit être modifiée pour la même raison. La relation véritable entre ces lois est la suivante.

Par le passage d'une unité d'électricité par une combinaison binaire sont dégagés $\frac{N}{9600}$ grammes d'un métal, si N est le poids atomique du métal. Pour

élever de 1° C. la température de N grammes d'un métal il faut 6,4 unités de chaleur environ ou $6{,}4 \cdot 42 \cdot 10^6$ unités d'énergie, et pour élever la température du même poids de 1 degré absolu, d'après la définition admise ci-dessus, il faut $\frac{6{,}4 \cdot 42 \cdot 10^6}{30400} = 8800$ unités absolues d'énergie. Il faut donc $\frac{11}{12}$ unités d'énergie pour élever la température de la masse dégagée de métal d'un degré absolu, tandis qu'il faut une unité d'énergie pour augmenter le potentiel de l'unité d'électricité elle-même d'une unité.

Enfin j'appellerai l'attention sur le lien intime qui existe entre la conception de la nature de la résistance électrique développée ci-dessus, d'après laquelle les courants électriques peuvent subsister continuellement dans l'intérieur des espaces limités sans résistance et par conséquent sans transport d'énergie, et la théorie du magnétisme et du diamagnétisme, dont elle est le fondement.

De tels courants électriques représentent une certaine énergie cinétique. Si nous considérons, par exemple, un conducteur linéaire fermé, parfaitement conducteur, dont la constante d'induction est C, et si nous approchons de ce conducteur un pôle magnétique au magnétisme m, on aura

$$C\frac{\partial i}{\partial t} + m\frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

où i est l'intensité du courant induit et w l'angle solide du cône, dont le sommet est au pôle magnétique et dont la surface enveloppe le conducteur. Par conséquent si aucun courant n'existait au commencement et que par conséquent $w = 0$ correspondît à $i = 0$, on aura $Ci + mw = 0$.

Le travail exécuté par le mouvement est

$$\int_0^w m\,i\,dw = \tfrac{1}{2} C i^2,$$

ce qui détermine l'énergie représentée par le courant.

Si nous considérons un corps à conductibilité parfaite, les calculs font ressortir que des forces extérieures ne pourront produire aucun courant à l'intérieur du corps, mais seulement à sa surface. La conductibilité de l'intérieur ne jouera donc aucun rôle et les courants électriques ne seront donc, comme l'électricité statique, que des phénomènes superficiels ou des phénomènes qui n'existent que dans les surfaces terminales du corps.

Si l'on approche un aimant d'un tel corps, des courants permanents se produiront à sa surface et le corps se comportera comme un corps diamagnétique. Si par exemple le corps a la forme d'une sphère de rayon r, et si l'on amène un pôle magnétique à la distance a de son centre, d'après le calcul que j'ai fait, le moment magnétique M des courants électriques produits par là sera représenté par $M = \frac{m r^3}{2 a^2}$ et l'énergie correspondante par $\frac{M^2}{r^3}$.

Comme résultat du développement théorique ressortira que nous trouverons vraisemblablement dans l'intérieur d'un corps, outre les mouvements de masse, des couches électriques doubles à différence de potentiel proportionelle à la température absolue et des courants électriques, comme formes différentes de l'énergie.

NOTES.

NOTE 1. Une analyse de ce mémoire se trouve dans les „Fortschritte der Physik“, t. XXXVII, Abtheilung 1 u. 2, p. 840—845.

NOTE 2. On a

$$u = \int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} f(x)\,dx = \sum_{p=1}^{p=n-1} \int_0^l dx \int_{-x}^{+x} f(pl+x)\,dx.$$

En développant ici $f(pl+x)$ en série suivant les puissances de x, on aura

$$u = \sum_{p=1}^{p=n-1} \int_0^l dx \int_{-x}^{+x} \left(f(pl) + f'(pl)\,x + f''(pl)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots\right) dx$$

$$= \sum_1^{n-1} \left(l^2 f(pl) + \frac{l^4}{12} f''(pl) + \ldots\right).$$

Or on peut, avec une certaine approximation, admettre que

$$f''(pl) = \frac{f((p+1)l) - 2f(pl) + f((p-1)l)}{l^2},$$

et si l'on substitue cette valeur dans l'expression de u, on obtiendra

$$u = \sum_1^{n-1} l^2 f(pl) + \frac{l^2}{12}\left(f(nl) - f((n-1)l) - f(l) + f(o)\right) + \ldots$$

NOTE 3. Comme

$$u = Ae^{x\sqrt{b_0}} + Be^{-x\sqrt{b_0}} + Ce^{-\frac{b_0}{a_0}t},$$

et comme $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pour $x = -\frac{1}{2}l$, on peut poser

$$u = \varepsilon\left(e^{(x+\frac{1}{2}l)\sqrt{b_0}} + e^{-(x+\frac{1}{2}l)\sqrt{b_0}}\right) + Ce^{-\frac{b_0}{a_0}t},$$

où ε est une constante.

Mais comme

$$\Delta = u_0 - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl},$$

on aura $\Delta = \varepsilon i$, ou i dépend de la seule constante $l^2 b_0$. De même ou reconnaît facilement que

$$\Sigma = \varepsilon m + (n-1)Ce^{-\frac{b_0}{a_0}t},$$

où m dépend de la seule constante $l^2 b_0$. De plus on a

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\, u^2 = \int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\, \varepsilon^2 \left(e^{2\left(x+\frac{l}{2}\right)\sqrt{b_0}} + e^{-2\left(x+\frac{l}{2}\right)\sqrt{b_0}} + 2\right)$$

$$+ 2\varepsilon Ce^{-\frac{b_0}{a_0}t} \int_x^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx \left(e^{\left(x+\frac{l}{2}\right)\sqrt{b_0}} + e^{-\left(x+\frac{l}{2}\right)\sqrt{b_0}}\right)$$

$$+ C^2 e^{-2\frac{b_0}{a_0}t} \int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx$$

$$= l^2\varepsilon^2 p + (n-1)l^2 C^2 e^{-2\frac{b_0}{a_0}t} + 2\varepsilon m C l^2 e^{-\frac{b_0}{a_0}t},$$

où p est une constante qui ne dépend que de $b_0 l^2$, et où le dernier terme s'obtient par cette considération qu'on a approximativement

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} f(x)\,dx = l^2\left(f(\tfrac{11}{12}l) + f(2l) + \dots\right.$$
$$\left. + f((n-2)l) + f((n-\tfrac{11}{12})l)\right).$$

Si l'on introduit ici

$$e^{-\frac{b_0}{a_0}t}C = \frac{\Sigma - \varepsilon m}{n-1},$$

on obtiendra

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\, u^2 = l^2\varepsilon^2 p + \frac{l^2(\Sigma-\varepsilon m)^2}{n-1} + \frac{2\varepsilon l^2(\Sigma-\varepsilon m)m}{n-1}$$

$$= l^2\left(p - \frac{m^2}{n-1}\right)\varepsilon^2 + \frac{l^2\Sigma^2}{n-1}$$

$$= l^2\Delta^2\left(\frac{p - \frac{m^2}{n-1}}{i^2}\right) + \frac{l^2\Sigma^2}{n-1},$$

où $\dfrac{p - \frac{m^2}{n-1}}{i^2} = f$ est fonction de $l^2 b_0$ seul.

De même on obtient

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = b_0\varepsilon^2 \int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\left(e^{2\left(x+\frac{l}{2}\right)\sqrt{b_0}} + e^{-2\left(x+\frac{l}{2}\right)\sqrt{b_0}} - 2\right)$$

$$= \varepsilon^2 h = \Delta^2 \frac{h}{i^2}$$

où $\dfrac{h}{i^2} = g$ est fonction de $b_0 l^2$ seulement.

NOTE 4. Si l'on intègre l'équation (6) en considérant Δ comme constant, on obtiendra

$$\Sigma = \frac{1}{bl^2}\Delta(1-\eta\Delta) + Ce^{-\frac{b}{a}t},$$

où C est une constante. Si l'on égale ici successivement Σ à Σ_m, $\dfrac{\Sigma_m + \Sigma_{m-1}}{2}$, Σ_{m-1} on obtiendra par soustraction

$$C = \frac{\Sigma_m - \Sigma_{m-1}}{2\left(e^{-\frac{b}{a}t_m} - e^{-\frac{b}{a}t}\right)} = \frac{\Sigma_m - \Sigma_{m-1}}{2\left(e^{-\frac{b}{a}t} - e^{-\frac{b}{a}t_{m-1}}\right)},$$

$$t = -\frac{a}{b}\log\frac{e^{-\frac{b}{a}t_m} + e^{-\frac{b}{a}t_{m-1}}}{2}.$$

Si l'on développe t suivant les puissances croissantes de $\frac{b}{a}$ et si l'on ne conserve que les deux premiers termes, on obtiendra

$$t = \frac{t_m + t_{m-1}}{2} - \frac{b}{8a}(t_m - t_{m-1})^2.$$

On a de plus

$$\Sigma_m = \Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t_m - t) + \frac{1}{1 \cdot 2}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}(t_m - t)^2 + \ldots,$$

$$\Sigma_{m-1} = \Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t_{m-1} - t) + \frac{1}{1 \cdot 2}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}(t_{m-1} - t)^2 + \ldots,$$

$$\begin{aligned}\Sigma_m - \Sigma_{m-1} = {} & \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t_m - t_{m-1}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}(t_m - t_{m-1})(t_m + t_{m-1} - 2t) \\ & + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \Sigma}{\partial t^3}(t_m - t_{m-1})((t_m - t)^2 + (t_m - t)(t_{m-1} - t) \\ & + (t_{m-1} - t)^2) + \ldots\end{aligned}$$

Mais comme on suppose que Δ est constant, on déduit de l'équation (6)

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2} = -\frac{b}{a}\frac{\partial \Sigma}{\partial t}, \quad \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial t^3} = \frac{b^2}{a^2}\frac{\partial \Sigma}{\partial t}.$$

Si l'on tient compte de ces valeurs et de celle qui a été trouvée pour t et si l'on ne conserve que les termes qui contiennent $\frac{b}{a}$ à la seconde puissance au plus, on obtiendra

$$\Sigma_m - \Sigma_{m-1} = \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t_m - t_{m-1})\left(1 - \frac{1}{12}\frac{b^2}{a^2}(t_m - t_{m-1})^2\right),$$

ou bien

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{\Sigma_m - \Sigma_{m-1}}{t_m - t_{m-1}}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{b^2}{a^2}(t_m - t_{m-1})^2 + \ldots\right).$$

NOTE 5. Lorenz n'indique pas comment il a calculé la température moyenne. Vraisemblablement, il a, pour chaque série d'observations, pris la moyenne des Σ, qui sont indiqués en millimètres, et divisé ce nombre par $7 \cdot 48$ ou $7 \cdot 58{,}5$ correspondant à une température voisine de 0° ou de 100° et $W = 102$ u. de S. Puis, après avoir de cette manière obtenu la température moyenne de chaque série d'observations, il a pris la moyenne des différentes séries en question, en attribuant à chaque série un poids proportionnel au nombre d'observations qu'elle contient. Quand W diffère de 102 u. de S., quand il est, par exemple, égal à 52 u. de S., Lorenz s'est vraisemblablement servi des nombres $48 \cdot \frac{52}{102}$ et $58{,}5 \cdot \frac{52}{102}$ au lieu de 48 et 58,5. Mais cette manière de procèder n'est acceptable que si l'on suppose que la différence potentielle des pôles de l'élément de Daniell reste toujours constante, et que les éléments thermoélectriques sont composés de fils de cuivre et d'argenton. Quand ils sont composés de fils de cuivre et de fer, comme dans les séries 1, 2, 4, Lorenz n'indique pas quelle longueur du fil a mesure correspond à 1° C., pour un W donné.

NOTE 6. Mes calculs donnent

$$c_0 = 0{,}08974\,, \quad c_{100} = 0{,}09521\,.$$

NOTE 7. Mes calculs donnent

$$c_0 = 0{,}2468\,, \quad c_{100} = 0{,}2532\,.$$

La moyenne est 0,2500, nombre à peu près identique au nombre donné par Lorenz.

NOTE 8. Mes calculs donnent

$$c_0 = 0{,}05195\,, \quad c_{100} = 0{,}05054\,,$$

dont la moyenne est 0,05125.

NOTE 9. Mes calculs donnent

$$\frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}075\,.$$

NOTE 10. On peut sans difficulté obtenir les nombres qu'a calculés Lorenz, si l'on prend un égal nombre de termes dans les deux séries; mais je ne sais pas comment Lorenz a calculé le nombre vers lequel tend la série des nombres trouvés.

NOTE 11. L'expression peut être remplacée par une somme, si l'on pose

$$2\int_{-\varepsilon}^{2n+1} u^{\frac{5}{4}}\,dx + \int_{2n-1}^{2n+1} u^{\frac{5}{4}}(2n-1-x)\,dx$$

$$= 2\int_{-\varepsilon}^{0} u^{\frac{5}{4}}\,dx + 2\sum_{p=0}^{p=n-1}\int_{2p}^{2p+2} u^{\frac{5}{4}}\,dx + \int_{2n-1}^{2n} u^{\frac{5}{4}}(2n-1-x)\,dx$$

$$+ \int_{2n}^{2n+1} u^{\frac{5}{4}}(2n+1-x)\,dx\,.$$

Si l'on pose $u^{\frac{5}{4}} = f(x)$, on aura

$$\int_{2p}^{2p+2} u^{\frac{5}{4}}\,dx = \int_0^1 [f(2p+1+x) + f(2p+1-x)]\,dx$$

$$= 2f(2p+1) + \frac{f''(2p+1)}{3}\,,$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur.

Mais on a, avec une certaine approximation,

$$f''(2p+1) = \frac{f(2p+3) - 2f(2p+1) + f(2p-1)}{4},$$

et par suite

$$2\sum_{p=0}^{p=n-1}\int_{2p}^{2p+2} u^{\frac{5}{4}}\,dx = 4\left(u_1^{\frac{5}{4}} + u_3^{\frac{5}{4}} + \ldots + u_{2n-1}^{\frac{5}{4}}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{6}\left(u_{2n+1} - u_{2n-1} - u_1 + u_{-1}\right).$$

Mais, comme $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pour $x = -\varepsilon$, on peut admettre que u reste sensiblement constant quand x est petit. C'est pourquoi l'on peut poser $u_1 = u_{-1}$ et

$$\int_{-\varepsilon}^{0} u^{\frac{5}{4}}\,dx = \varepsilon\, u_1^{\frac{5}{4}}.$$

De plus, en posant de nouveau $u^{\frac{5}{4}} = f(x)$, on a

$$\int_{2n-1}^{2n} u^{\frac{5}{4}}(2n-1-x)\,dx + \int_{2n}^{2n+1} u^{\frac{5}{4}}(2n+1-x)\,dx$$
$$= \int_0^1 [f(2n+x) - f(2n-x)](1-x)\,dx$$
$$= \text{(approx.)}\ 2f'(2n)\int_0^1 x(1-x)\,dx = \tfrac{1}{3}f'(2n).$$

Mais (approx.)

$$f'(2n) = \frac{f(2n+1) - f(2n-1)}{2},$$

et par suite

$$\int_{2n-1}^{2n} u^{\frac{5}{4}}(2n-1-x)\,dx + \int_{2n}^{2n+1} u^{\frac{5}{4}}(2n+1-x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{6}\left(u_{2n+1} - u_{n-1}\right).$$

Si l'on tient compte de ces valeurs, on obtiendra l'expression donnée dans le texte. Toutefois, ce raisonnement ne fait pas ressortir que l'approximation est grande, comme le dit Lorenz.

NOTE **12**. 0,006846 d'après mes calculs, et par suite $4a = 44,14$.

NOTE **13**. 0,002291 d'après mes calculs, et par suite $4a = 8,897$.

NOTE **14**. 0,000660 d'après mes calculs, et par suite $4a = 4,677$.

SUR

LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

AU MOYEN D'INTÉGRALES DÉFINIES.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS AU MOYEN D'INTÉGRALES DÉFINIES.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK 1860, P. 160—168.* * NOTE 1.

On connaît plusieurs méthodes qui servent à exprimer des fonctions arbitraires au moyen d'intégrales définies; ces développements ont eu surtout de l'importance pour la théorie de l'intégration des équations différentielles sous des conditions données: aussi est-ce surtout en physique mathématique qu'on a fait des applications étendues de ces méthodes. Qu'il me soit permis ici d'appeler l'attention sur une méthode nouvelle, de mettre en évidence la relation qui existe entre elle et les méthodes connues et enfin de faire ressortir une partie des applications étendues qu'on peut faire de cette méthode dans toutes les parties de la théorie de l'élasticité.

Si b est positif, on arrive aisément, au moyen de l'intégration par parties, à l'identité

$$\int_0^\infty e^{-bx} \cos ax\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Multipliant par da et intégrant entre les limites $a = 0$ et $a = a$, on en tire

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} \sin ax\, dx}{x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b},$$

d'où l'on déduira, en faisant $b = 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Il faut pourtant remarquer que le premier membre de cette équation est indéterminé, et qu'on ne peut le déterminer qu'en tenant compte de l'origine de l'intégrale, qui est une valeur limite d'une expression déterminée, et doit être considéré comme une manière abrégée d'écrire l'intégrale

$$\left[\int_0^\infty \frac{e^{-bx} \sin ax\, dx}{x}\right]^{b=0},$$

expression à laquelle on devra recourir, si l'application de la notation abrégée conduit à des résultats indéterminés. La notation ci-dessus exprime qu'on doit égaler b à zéro, non pas avant, mais après l'intégration; ici, comme partout dans la mathématique, quand on traite des quantités qui, à un certain endroit des calculs doivent être égalées à zéro, il importe essentiellement d'observer à quel moment cela se fait.

Si nous cherchons maintenant la valeur de la série $\Sigma e^{-bm} \cos am$, où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières de m, depuis 0 jusqu'à l'infini et où l'on ne prend que la moitié du premier terme, nous obtiendrons, en remplaçant le cosinus par son expression en exponentielles imaginaires et sommant tous les termes, la valeur

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2b}}{1 - 2e^{-b} \cos a + e^{-2b}}.$$

Pour $b = 0$ l'expression s'évanouit, à moins que $\cos a$ ne soit en même temps égal à 1. Si nous supposons la valeur de a comprise entre -2π et $+2\pi$, sans pourtant atteindre ces deux limites, a sera infiniment petit* et $\cos a = 1 - \frac{a^2}{2}$. Par conséquent on aura * NOTE 2.

$$\left[\Sigma e^{-bm} \cos a\, m\right]^{b=0} = \left[\frac{b}{a^2 + b^2}\right]^{b=0},$$

valeur égale à l'intégrale définie considérée ci-dessus.

Si l'on multiplie par da les deux membres de cette équation et qu'on intègre de $a = 0$ jusqu'à $a = a$, on obtiendra

$$\sum \frac{\sin a\, m}{m} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ pour } 2\pi > a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} \text{ pour } -2\pi < a < 0, \end{cases} \tag{2}$$

où le premier membre est écrit sous la forme abrégée, qui est plus commode et généralement employée, mais où la remarque faite ci-dessus est encore valable.

Si nous partons de l'équation

$$2\int f(x)\, dx = \int_{\mu}^{x} f(\alpha)\, d\alpha - \int_{x}^{\mu_1} f(\alpha)\, d\alpha, \tag{3}$$

où la valeur de x est comprise entre une constante plus grande μ_1 et une constante plus petite μ, et si nous multiplions le second membre par

$$\pm \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin((x-\alpha)\beta)\, d\beta}{\beta} = 1,$$

où le signe supérieur est valable pour $x > \alpha$, l'inférieur pour $x < \alpha$, nous obtiendrons

$$2\int f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\mu}^{\mu_1} f(\alpha)\,d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\sin(x-\alpha)\beta}{\beta}\,d\beta.$$

En différentiant les deux membres par rapport à x, on obtiendra

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\mu_1} f(\alpha)\,d\alpha \int_0^{\infty} \cos(x-\alpha)\beta \cdot d\beta\,, \tag{4}$$

$$\mu < x < \mu_1,$$

ce qui est le théorème de Fourier.

Si, de même, on multiplie le second membre de (3) par

$$\pm\frac{2}{\pi}\sum \frac{\sin(x-\alpha)m}{m} = 1\,,$$

où le signe supérieur est valable pour $2\pi > x-\alpha > 0$, l'inférieur pour $0 > x-\alpha > -2\pi$, on obtiendra de la même manière

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos(m(x-\alpha))\cdot d\alpha, \quad \pi > x > -\pi, \tag{5}$$

où $x-\alpha$ doit être compris entre les limites -2π et $+2\pi$, et où par conséquent x et α, qui tous deux peuvent parcourir la même série de valeurs, sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Ces deux développements au moyen d'intégrales définies sont connus et ont reçu des applications étendues. Il y a pourtant encore un troisième développement, qui peut être obtenu d'une manière analogue, à savoir en multipliant le second membre de (3) par

$$\pm\frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{y-\beta}\right]^{y=\beta} = 1\,,$$

où le signe supérieur est valable pour $x > \alpha$, le signe

inférieur pour $x < \alpha$, et où l'on suppose que $y-\beta$ s'approche de zéro en parcourant une série de valeurs positives. On obtiendra alors

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\mu}^{\mu_1} f(\alpha)\, d\alpha \frac{y-\beta}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\right]^{y=\beta}, \quad \mu < x < \mu_1. \quad (6)$$

Si l'on supposait que $y-\beta$ fût originairement négatif, le second membre de (6) devrait être changé de signe.

Au moyen de ces trois méthodes on peut aussi développer sans difficulté des fonctions de plusieurs variables au moyen d'intégrales définies. Nous nous bornerons ici à l'application de la dernière méthode. L'équation (6) peut être écrite sous la forme plus générale

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\mu}^{\mu_1} f(\alpha, y)\, d\alpha \frac{z-\gamma}{(x-\alpha)^2+(z-\gamma)^2}\right]^{z=\gamma}.$$

On trouve facilement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{r^3} = \frac{2}{(x-\alpha)^2+(z-\gamma)^2},$$

où

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2},$$

et, si l'on remplace le second membre de cette équation, qui figure dans l'équation ci-dessus, par le premier, on obtiendra

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\mu}^{\mu_1} f(\alpha, y)\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z-\gamma}{r^3}\, d\beta\right]^{z=\gamma}.$$

Comme le second membre s'évanouit pour toutes valeurs finies de r, il faut seulement tenir compte des éléments pour lesquels $x = \alpha$, $y = \beta$.

C'est pourquoi l'on peut remplacer y par β et choisir des limites arbitraires de α et β; il faut pourtant que x et y soient compris entre elles. Par conséquent on obtiendra

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\int d\alpha \int d\beta \frac{z-\gamma}{r^3} f(\alpha, \beta)\right]^{z=\gamma}, \tag{7}$$

ou

$$f(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial z}\int d\alpha \int d\beta \frac{f(\alpha, \beta)}{r}\right]^{z=\gamma}. \tag{7'}$$

Ici le point (x, y) est situé entre les limites de l'intégrale et l'on suppose que $z-\gamma$ est originairement positif. Dans le cas contraire le signe doit être renversé.

On peut remarquer que l'expression entre crochets dans l'équation (7) satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0, \tag{8}$$

et qu'elle exprime, d'après la loi de Newton, l'attraction qu'exerce un plan dans la direction de la normale sur un point, si un élément du plan a la masse $f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$, et si l'on prend comme unité d'attraction l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance. L'équation (7) exprime alors que l'attraction exercée par le plan dans la direction de la normale sur un point qui s'approche infiniment de lui est égale à $2\pi f(x, y)$, c'est-à-dire à 2π fois la masse de l'élément le plus proche, divisée par la surface $dx\,dy$ de l'élément.

Pour des fonctions de plusieurs variables $(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$ on trouve plus généralement

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\left[\int d\alpha_1 \int d\alpha_2 \ldots \int d\alpha_{n-1} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}) \frac{x_n - \alpha_n}{r^n}\right]^{x_n=\alpha_n}, \tag{9}$$

où

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) + \ldots + (x_n - a_n)^2};$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont situés entre les limites de l'intégrale et $x_n - a_n$ est supposé positif à l'origine.

On peut facilement se convaincre de la validité de cette équation, si l'on remarque, qu'on n'a besoin que de tenir compte des éléments pour lesquels $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 \ldots$ On peut donc remplacer $f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ par $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ et remplacer les limites arbitraires par $-\infty$ et $+\infty$. Alors l'équation (9) est vérifiée sans difficulté.*

L'expression entre crochets satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \cdots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = 0. \tag{10}$$

Par conséquent cette méthode pour exprimer les fonctions peut surtout être employée pour l'intégration des équations différentielles de la forme (10) dont l'intégrale est une fonction donnée pour une valeur donnée d'une des variables, de manière que les deux fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale de (10) sont déterminées par cette fonction et par les limites de l'intégrale.

L'intégrale est donc dans ce cas déterminée par le second membre de (9), si l'on supprime les crochets.

Mais la méthode peut encore servir à l'intégration d'autres équations différentielles après avoir été legèrement généralisée. Nous prendrons comme exemple l'équation différentielle qui exprime la loi à laquelle sont assu-

---

* Cfr. Jacobi. Journal de Crelle, vol. 12, p. 59 et 60.

jettis tous les petits mouvements des corps élastiques à élasticité constante, savoir

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{11}$$

On peut facilement se convaincre que cette équation est vérifiée par

$$\frac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\ \beta,\ \gamma\right)}{r} \quad \text{où} \quad r=\sqrt{x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2};$$

par conséquent aussi par

$$\varphi=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int d\beta\int d\gamma\,\frac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\ \beta,\ \gamma\right)}{r}. \tag{12}$$

Cette expression se réduit, d'après (7'), à $f(x, y, z)$ pour $x = 0$. Car, seul, le premier terme est à considérer dans le développement de $\varphi\left(t-\frac{r}{\omega},\ \beta,\ \gamma\right)$ suivant les puissances de $\frac{r}{\omega}$, si $r = 0$, de sorte qu'on peut négliger tous les termes suivants.

Si le mouvement, qui est déterminé par l'intégrale, emane d'un plan ($x = 0$) à limites données, et si l'on suppose que l'intégrale est ici exprimée par $f(t, y, z)$ et qu'elle ne soit pas assujettie à d'autres conditions, l'équation différentielle est pour x positif complètement intégrée par (12), où l'intégrale est étendue aux limites du plan, et pour x négatif on ne doit que changer le signe.

L'intégrale (12) fait ressortir qu'on peut considérer chaque élément $d\beta\, d\gamma$ comme l'origine d'une partie du mouvement en (x, y, z), qui en émane avec une vitesse

constante ω, la partie de l'intégrale due à cet élément étant

$$-\frac{1}{2\pi} d\beta\, d\gamma \frac{\partial}{\partial x} \frac{f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{r}.$$

Si la distance du point considéré au plan primitivement mis en mouvement est finie, on peut considérer chaque élément du plan, $d\beta\, d\gamma$, comme un centre de mouvement, de manière que le mouvement du point considéré devienne la somme des mouvements qui émanent des différents centres de mouvement.

C'est la proposition qui exprime le principe d'Huygens; mais ce principe est incomplet parce qu'il ne suffit pas à déterminer le mouvement. Il est de plus inexact, et si l'on s'en sert (comme le fait Lamé dans ses „Leçons") pour le combiner avec les équations ordinaires du mouvement, on parviendra à des résultats incorrects, parce qu'il n'est pas valable aux distances infiniment petites du plan en mouvement.

Dans ce dernier cas, le mouvement doit être considéré comme émanant, non pas d'un point mais d'un élément $d\beta\, d\gamma$ du plan, et l'expression exacte de la partie de l'intégrale qui en provient sera, si β et γ sont les coordonnées du point milieu de l'élément

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\beta - \frac{d\beta}{2}}^{\beta + \frac{d\beta}{2}} d\beta \int_{\gamma - \frac{d\gamma}{2}}^{\gamma + \frac{d\gamma}{2}} d\gamma \frac{f\left(t - \frac{r}{\omega}, \beta, \gamma\right)}{r},$$

expression qui, d'après (7'), se réduit à $f(t, y, z)$ pour $x = 0$.

Comme exemple de l'application de l'équation (12), on peut supposer que l'intégrale puisse dans toute l'étendue d'un plan ($x = 0$) être exprimée par $f(\omega t - my - nz)$. L'intégrale peut alors être exprimée sous une forme plus simple, et le problème qui consiste à déduire cette forme de l'équation (12) ne sera pas dépourvu d'interêt.

NOTES.

NOTE 1. On trouvera une grande partie de la substance de ce mémoire développée dans les deux premiers mémoires des tomes premier et second des œuvres scientifiques de Lorenz. Ces deux mémoires font de plus ressortir les applications qu'on peut faire des théories développées ici. Du reste la méthode dont on s'est servi ici diffère de celle qui est employée dans les mémoires cités.

NOTE 2. C'est-à-dire, si b converge vers zéro, a doit également converger vers la même limite, si l'expression ne s'évanouit pas.

UN THÉORÈME

SUR

LA FONCTION POTENTIELLE.

UN THÉORÈME SUR LA FONCTION POTENTIELLE.

MATHEMATISK TIDSSKRIFT, 1863, P. 52—63.

L'importance de la fonction potentielle pour l'application de la mathématique à la nature est tellement considérable, qu'une connaissance approfondie de ses propriétés est indispensable pour la solution d'un grand nombre de problèmes présentés par la nature elle-même.

Mais, nonobstant les recherches nombreuses faites sur cette fonction, on aura pourtant, il me semble, en traitant les problèmes de la physique mathématique, parfois le sentiment, que nos connaissances sont très limitées à son égard. La présente recherche, provoquée par différentes difficultés de la physique mathématique, qui peuvent être rapportées à la solution du problème en question, a encore confirmé ma conviction que notre connaissance de la fonction potentielle est encore restreinte, et que la présente contribution à son étude n'est que peu de chose par rapport à ce qui reste encore à faire. Que cela soit pour les autres, comme ce l'est pour moi-même, une incitation à pousser avec énergie l'étude de cette fonction!

La fonction potentielle d'un corps par rapport à un point (x, y, z) est exprimée par

$$V = \int d\alpha \int d\beta \int d\gamma \frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}}.$$

Les intégrations relatives aux trois variables α, β, γ peuvent ici être étendues de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma)$ étant tout à fait arbitraire, même discontinue, et par exemple égale à zéro dans certaines portions de l'espace. On sait alors qu'on peut inversement déterminer f par la fonction potentielle V, car on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi f(x, y, z).$$

Je chercherai à montrer comment le problème correspondant peut être résolu pour la fonction potentielle d'un plan par rapport à un point du plan lui-même, problème dont la solution ne peut pas être déduite de la proposition citée.

Cette fonction est, pour un plan que nous prendrons comme plan des xy, définie par

$$\varpi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \frac{f(\alpha, \beta)}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}} \tag{1}$$

Le problème est d'invertir cette équation, de manière à déterminer la fonction f par la fonction ϖ.

La fonction potentielle peut être exprimée en coordonnées polaires sous la forme

$$\varpi(p, \varphi) = \int_0^{\infty} r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{f(r, \theta)}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr\cos(\theta - \varphi)}}. \tag{2}$$

Avant de passer au détail de la transformation de ces intégrales, il faut commencer par établir quelques propositions auxiliaires, qui serviront à la solution du problème.

I.

On peut mettre l'intégrale

$$\int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{f(r)\cos m\theta}{\sqrt{p^2+r^2-2pr\cos\theta}} \tag{3}$$

sous une autre forme, en développant le dénominateur suivant les puissances croissantes de r, si $r<p$, ou de p, si $r>p$, intégrant ensuite terme à terme, puis sommant la série ainsi obtenue (voir Ramus: Méch., p. 88). Le même résultat s'obtient par l'application de la formule (voir Schlömilch: Höh. Analyse, p. 339)* * NOTE 1.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta\, d\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}}$$

$$= a^m \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}}\right)^{2m} \frac{d\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}}, \qquad a<1,$$

où l'on a posé (voir l'endroit cité)

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}} = \sin\psi,$$

d'où résulte

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}} = \frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}}{1-a\cos\theta}, \quad d\psi = \frac{1-a\cos\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}\,d\theta.$$

En multipliant ces deux équations, on obtiendra

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}} = \frac{d\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}},$$

ce qui transforme l'intégrale ci-dessus en

$$a^m \int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2m}\psi\, d\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}},$$

les limites étant les mêmes pour ψ que pour θ, car $\sin\psi$ doit prendre toutes les valeurs entre -1 et $+1$, limites qui correspondent à $\cos\theta = a$.

Comme $\sin\psi$ n'entre dans l'intégrale que par son carré, on peut encore faire varier ψ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et quadrupler le résultat, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta\, d\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}} = 4a^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2m}\psi\, d\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}}.$$

Si l'on remplace ici a par $\frac{r}{p}$ ou par $\frac{p}{r}$ suivant que $r \lesseqgtr p$, on reconnaîtra aisément que l'intégrale (3) peut être exprimée par

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\psi\, d\psi \left[\int_0^p \frac{r\,dr\,f(r)}{\sqrt{p^2-r^2\sin^2\psi}}\frac{r^m}{p^m} + \int_p^\infty \frac{r\,dr\,f(r)}{\sqrt{r^2-p^2\sin^2\psi}}\frac{p^m}{r^m}\right]. \quad (4)$$

Dans la première de ces deux intégrales, je pose $r\sin\psi = p\sin\varphi$, par où j'obtiens

$$\frac{d\psi}{\sqrt{p^2-r^2\sin^2\psi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{r^2-p^2\sin^2\varphi}}.$$

Or l'intégration peut être exécutée de deux manières, soit d'abord par rapport à φ, les limites de $\sin\varphi$ étant 0 et $\frac{r}{p}$, puis par rapport à r entre les limites $r = 0$ et $r = p$, soit d'abord par rapport à r, entre les limites $r = p\sin\varphi$ et $r = p$, puis par rapport à φ de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dans les deux cas les deux variables par-

courront la même série de valeurs; mais on doit ici préférer la dernière méthode, parce qu'elle permet d'exécuter immédiatement l'addition des deux termes de (4), en remplaçant de nouveau φ par ψ. Cette expression sera alors transformée en

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\psi\, d\psi \int_{p\sin\psi}^{\infty} \frac{r\,dr\,f(r)}{\sqrt{r^2 - p^2\sin^2\psi}}\,\frac{p^m}{r^m}.$$

Si l'on pose ici

$$p\sin\psi = q, \quad d\psi = \frac{dq}{\sqrt{p^2 - q^2}},$$

on obtiendra par conséquent

$$\int_0^{\infty} r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{f(r)\cos m\theta}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr\cos\theta}}$$

$$= 4\int_0^{p} \frac{dq}{\sqrt{p^2 - q^2}} \int_q^{\infty} \frac{r\,dr\,f(r)}{\sqrt{r^2 - q^2}}\,\frac{q^{2m}}{r^m p^m}. \tag{5}$$

On pourrait transformer la seconde intégrale de (4) d'une manière analogue, en posant

$$p\sin\psi = r\sin\varphi,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{\sqrt{r^2 - p^2\sin^2\psi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{p^2 - r^2\sin^2\varphi}}.$$

Comme précédemment, on suppose que l'intégration est exécutée en premier lieu par rapport à r entre les limites $r = p$ et $r = \frac{p}{\sin\varphi}$ et puis par rapport à φ de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Si l'on remplace de nouveau φ par ψ et si l'on fait l'addition des deux termes de (4), on trouvera

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\psi\, d\psi \int_0^{\frac{p}{\sin\psi}} \frac{r\,dr\,f(r)}{\sqrt{p^2 - r^2\sin^2\psi}}\,\frac{r^m}{p^m},$$

et, si l'on fait ici la substitution $\frac{p}{\sin\psi} = q$, on obtiendra une nouvelle expression de l'intégrale en question (3), savoir

$$\int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{f(r)\cos m\theta}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr\cos\theta}}$$

$$= 4\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2 - p^2}} \int_0^q \frac{r\,dr\,f(r)}{\sqrt{q^2 - r^2}}\,\frac{r^m p^m}{q^{2m}}. \qquad (6)$$

On reconnaît pourtant facilement que les deux expressions (5) et (6) sont identiques, ce qui devient évident si l'on pose dans la première $q = pu$ et $r = puv$, et dans la seconde $q = pv$ et $r = pvu$.

II.

Abel a démontré qu'une fonction d'une seule variable peut être exprimée au moyen d'une intégrale définie de
* NOTE 2. la manière suivante (voir Ramus: Diff. et Int., p. 269).*

$$\varphi(x) = \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_0^x \frac{d\theta}{(x-\theta)^{1-m}} \int_0^\theta \frac{\varphi'(z)\,dz}{(\theta - z)^m}, \qquad (7)$$

où m est une fraction proprement dite, positive et arbitraire.

Nous poserons ici

$$m = \tfrac{1}{2},\quad \theta = q^2,\quad z = r^2,\quad x = p^2,$$

puis nous remplacerons $\varphi(p^2)$ par $\varphi(p)$. On obtiendra

ainsi

$$\varphi(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^p \frac{q\,dq}{\sqrt{p^2-q^2}}\int_0^q \frac{\varphi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}}. \tag{8}$$

On peut se servir de cette expression si l'on a, par exemple,

$$\varphi(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^p \frac{q\,dq}{\sqrt{p^2-q^2}}\,\psi(q). \tag{9}$$

pour déterminer inversement la fonction ψ par φ, car on doit avoir

$$\psi(q) = \int_0^q \frac{\varphi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}}. \tag{9'}$$

Au contraire, si dans la formule (7) nous posons

$$m = \frac{1}{2},\quad \theta = \frac{1}{q^2},\quad z = \frac{1}{r^2},\quad x = \frac{1}{p^2},$$

et si nous remplaçons ensuite $\varphi\left(\frac{1}{p^2}\right)$ par $\varphi(p)$, nous obtiendrons

$$\varphi(p) = -\frac{2}{\pi}\int_p^\infty \frac{p\,dq}{q\sqrt{q^2-p^2}}\int_q^\infty \frac{r\,\varphi'(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}}. \tag{10}$$

Cette équation va être différentiée par rapport à p; mais il faut observer qu'on doit alors, pour éviter des indéterminations provenant de termes infinis, exécuter la différentiation en supposant d'abord que la limite inférieure soit $p+h$, puis intégrer par parties et enfin faire tendre h vers zéro*. Si l'on écrit de nouveau $\varphi(p)$ à la place de $\varphi'(p)$, on obtiendra aisément de cette manière

* NOTE 3.

$$\varphi(p) = -\frac{2}{\pi}\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\cdot\frac{d}{dq}\int_q^\infty \frac{r\,\varphi(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}}. \tag{11}$$

La différentiation indiquée par rapport à q peut être exécutée de la même manière, par où l'équation prendra la forme

$$\varphi(p) = -\frac{2}{\pi}\int_p^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\int_q^\infty \frac{\varphi'(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}}. \tag{12}$$

III.

A présent nous passerons de ces recherches préliminaires au problème en question. Il sera alors naturel de chercher en premier lieu la solution d'un cas particulier, celui où la fonction $f(r, \theta)$ de l'équation (2) ne dépend que de r seulement. On peut dans ce cas remplacer $\theta-\varphi$ dans l'équation (2) par θ, tandis que les limites de θ seront constamment 0 et 2π, et $\varpi(p, \varphi)$ sera alors fonction de p seulement.

Nous pouvons alors partir de l'équation

$$\varpi(p) = \int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{f(r)}{\sqrt{p^2+r^2-2pr\cos\theta}}, \tag{13}$$

qui, au moyen de la relation (5), où $m = 0$, sera transformée en

$$\varpi(p) = 4\int_0^p \frac{dq}{\sqrt{p^2-q^2}}\int_q^\infty \frac{r f(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}}.$$

Si nous posons ici

$$\int_q^\infty \frac{r f(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}} = q\psi(q),$$

nous aurons

$$\varpi(p) = 4\int_0^p \frac{q\,dq\,\psi(q)}{\sqrt{p^2-q^2}},$$

équation qui est identique à l'équation (9), si l'on pose $\frac{\varpi(p)}{2\pi} = \varphi(p)$. L'équation suivante (9') deviendra alors

$$\psi(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}},$$

d'où, en introduisant l'expression trouvée ci-dessus pour $\psi(q)$, l'on déduira

$$\frac{1}{q}\int_0^\infty \frac{r f(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}}.$$

Si maintenant on multiplie cette équation par $-\frac{2}{\pi}\frac{p\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}$ et qu'on intègre entre les limites $q = p$ et $q = \infty$, on obtiendra

$$-\frac{2}{\pi}\int_p^\infty \frac{p\,dq}{q\sqrt{q^2-p^2}}\int_q^\infty \frac{r f(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}} = -\frac{1}{\pi^2}\int_p^\infty \frac{p\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}}.$$

Le premier membre est d'après (10) égal à $\int f(p)\,dp$ si l'on remplace $\varphi'(r)$ par $f(r)$, et l'on tirera de l'équation, en différentiant par rapport à p,

$$f(p) = -\frac{1}{\pi^2}\frac{d}{dp}\int_p^\infty \frac{p\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}}.$$

Le problème est donc résolu, car la fonction f est exprimée au moyen de la fonction ϖ, mais il y a avantage à mettre le résultat sous d'autres formes.

Si la différentiation par rapport à p est exécutée de la manière indiquée ci-dessus dans un cas analogue, on obtiendra *

* NOTE 4.

$$f(p) = -\frac{1}{\pi^2}\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\,\frac{d}{dq}\left(q\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}}\right),$$

puis

$$f(p) = -\frac{1}{\pi^2}\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\int_0^q \frac{dr}{\sqrt{q^2-r^2}}\,\frac{d(r\varpi'(r))}{dr}. \qquad (14)$$

Sous cette forme le résultat se prête mieux au calcul pratique. Du reste il est identique au résultat suivant

* NOTE 5. $$f(p) = -\frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{p}\,\frac{d}{dp}\left(p\,\frac{d}{dp}\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\int_0^q \frac{dr\,r\varpi(r)}{\sqrt{q^2-r^2}}\right)^*, \qquad (15)$$

ce qu'on peut reconnaître en effectuant les différentiations indiquées.

Si nous cherchons au contraire à donner le résultat sous une forme analogue à l'équation (13), nous pourrons nous servir de l'équation (6), où nous ferons $m = 0$ et d'abord $f(r) = \frac{d(r\varpi'(r))}{r\,dr}$, puis $f(r) = \varpi(r)$. Par là les équations (14) et (15) se transformeront en

$$f(p) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{p^2+r^2-2pr\cos\theta}}\,\frac{d(r\varpi'(r))}{r\,dr} \qquad (16)$$

et

$$f(p) = -\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{p}\,\frac{d}{dp}\left(p\,\frac{d}{dp}\int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi} \frac{d\theta\cdot\varpi(r)}{\sqrt{p^2+r^2-2pr\cos\theta}}\right), \qquad (17)$$

de manière à représenter $f(p)$ sous forme d'une nouvelle fonction potentielle.

Après avoir résolu le problème dans le cas spécial considéré, nous passerons au cas général. Soit proposée l'équation

$$\varpi(p, \varphi) = \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{f(r, \theta)}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr\cos(\theta - \varphi)}},$$

il est à prévoir que la fonction $f(r, \theta)$ pourra être exprimée sous une forme analogue au résultat obtenu récemment; c'est pourquoi nous examinerons en détail l'expression

$$F = \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\varpi(r, \theta)}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr\cos(\theta - \varphi)}}. \qquad (18)$$

Ici on a

$$\varpi(r, \theta) = \int_0^\infty r'\,dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{f(r', \theta')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta' - \theta)}} \qquad (19)$$

où nous exprimerons $f(r', \theta')$, d'une manière bien connue, par une intégrale définie (voir Ramus: Diff. et Int., p. 82), savoir

$$f(r', \theta') = \frac{1}{\pi} \sum \int_{-\pi}^{+\pi} f(r', \psi) \cos m(\theta' - \psi)\, d\psi. \qquad (20)$$

Σ désigne ici une somme étendue à toutes les valeurs entières et positives de m, le premier terme devant être divisé par 2. Le second membre de (18) se présente par ces substitutions sous la forme d'une intégrale quintuple, où nous remplacerons θ par $\theta + \varphi$ et θ' par $\theta + \theta' + \varphi$, sans pourtant changer les limites de l'intégrale; $\cos m(\theta' - \psi)$ sera donc remplacé par $\cos m(\theta' + \theta + \varphi - \psi)$, mais, comme les termes qui contiennent $\sin m\theta$ et $\sin m\theta'$ s'évanouiront dans l'intégration, on peut remplacer $\cos m(\theta' + \theta + \varphi - \psi)$ par

$$\cos m\theta \cos m\theta' \cos m(\varphi - \psi).$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\psi(r) = \int_0^\infty r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{f(r', \psi) \cos m\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \theta'}},$$

F sera exprimée par

$$F = \frac{1}{\pi} \sum \int_{-\pi}^{+\pi} d\psi \cos m(\varphi - \psi) \int_0^\infty r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\psi(r) \cos m\theta}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr \cos \theta}}.$$

Ici nous pouvons employer les formules trouvées antérieurement, car nous aurons d'après (5)

$$\psi(r) = 4 \int_0^r \frac{dq'}{\sqrt{r'^2 - q'^2}} \int_{q'}^\infty \frac{r' dr' f(r' \psi)}{\sqrt{r'^2 - q'^2}} \frac{q'^{2m}}{r'^m r^m},$$

et d'après (6)

$$\int_0^\infty r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\psi(r) \cos m\theta}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr \cos \theta}} = 4 \int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2 - p^2}} \int_0^q \frac{r\, dr\, \psi(r)}{\sqrt{q^2 - r^2}} \frac{r^m p^m}{q^{2m}},$$

et par conséquent l'expression de F sera

$$\frac{16}{\pi} \sum \int_{-\pi}^{+\pi} d\psi \cos m(\varphi - \psi) \int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2 - p^2}}$$

$$\times \int_0^q \frac{r\, dr}{\sqrt{q^2 - r^2}} \int_0^r \frac{dq'}{\sqrt{r'^2 - q'^2}} \int_{q'}^\infty \frac{r' dr' f(r', \psi')}{\sqrt{r'^2 - q'^2}} \frac{q'^{2m} p^m}{q^{2m} r'^m}.$$

Mais, d'après (8), on a

$$\int_0^q \frac{r\, dr}{\sqrt{q^2 - r^2}} \int_0^r \frac{dq'\, \varphi'(q')}{\sqrt{r^2 - q'^2}} = \frac{\pi}{2} \varphi(q).$$

Par suite, l'expression ci-dessus se transformera en

$$F = 8 \sum \int_{-\pi}^{+\pi} d\psi \cos m(\varphi - \psi) \int_p^\infty \frac{dq\, \varphi(q)}{\sqrt{q^2 - p^2}} \frac{p^m}{q^{2m}}.$$

Si nous différentions par rapport à p, nous obtiendrons

$$p\frac{\partial F}{\partial p} = 8\sum\int_{-\pi}^{+\pi} d\psi \cos m(\varphi-\psi)\int_p^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\left[q\varphi'(q)-m\varphi(q)\right]\frac{p^m}{q^{2m+1}}.$$

Comme on a de plus

$$\frac{d}{dp}\int_p^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\,\frac{\varphi'(q)}{q^{2m}} = \int_p^\infty \frac{p\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\,\frac{d}{dq}\cdot\frac{\varphi'(q)}{q^{2m}}$$

et

$$\frac{d}{dp}\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\cdot\frac{\varphi(q)}{q^{2m}} = \int_p^\infty \frac{q\,dq}{p\sqrt{q^2-p^2}}\left[q\varphi'(q)-2m\varphi(q)\right]\frac{1}{q^{2m+1}},$$

si l'on différentie de nouveau l'expression ci-dessus par rapport à p, on aura

$$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}\right)$$

$$= 8\sum\int_{-\pi}^{+\pi} d\psi \cos m(\varphi-\psi)\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\left[p^m\frac{d}{dq}\frac{\varphi'(q)}{q^{2m}}+m^2p^{m-2}\frac{\varphi(q)}{q^{2m}}\right].$$

Si l'on remarque que la dernière partie de l'intégrale est égale à $-\frac{1}{p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}$, en faisant passer ce terme au premier membre de l'équation, on obtiendra

$$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{1}{p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}$$

$$= 8\sum\int_{-\pi}^{+\pi} d\psi \cos m(\varphi-\psi)\,p^m\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\frac{d}{dq}\left(\frac{\varphi'(q)}{q^{2m}}\right). \quad (21)$$

Ici il faut substituer, d'après l'expression trouvée ci-dessus de $\varphi'(q')$,

$$\frac{\varphi'(q)}{q^{2m}} = \int_q^\infty \frac{r'\,dr' f(r', \psi)}{\sqrt{r'^2 - q^2}} \frac{1}{r'^m},$$

et nous pourrons nous servir de l'équation (11), si nous remplaçons r par r', $\varphi(r)$ par $\frac{f(r', \psi)}{r'^m}$, pour réduire le second membre de l'équation (21), qui deviendra

$$-4\pi \sum \int_{-\pi}^{+\pi} d\psi \cos m(\varphi - \psi) f(p, \psi).$$

Mais, d'après (20), cette expression est identique à

$$-4\pi^2 f(p, \varphi),$$

de manière que l'équation (21) se réduit à

$$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -4\pi^2 f(p, \varphi). \qquad (22)$$

Le problème est donc résolu, car ici $f(p, \varphi)$ est exprimé, au moyen de F, et si l'on introduit la valeur (18) de F, on aura

$$f(p, \varphi) = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\cdot p\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} \frac{\varpi(r, \theta)\,d\theta}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr\cos(\theta - \varphi)}}. \qquad (23)$$

En introduisant les coordonnées rectangulaires, on tirera de l'équation de départ (1), ou

$$\varpi(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha' \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta' \frac{f(\alpha', \beta')}{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}}, \qquad (24)$$

d'après le résultat trouvé

* NOTE 6. $$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}}.^* \qquad (25)$$

On peut écrire le second membre de cette équation sous une forme plus commode pour le calcul, en remplaçant α par $\alpha+x$, β par $\beta+y$ puis effectuant les différentiations indiquées et enfin remplaçant de nouveau $\alpha+x$ par α, $\beta+y$ par β, par où l'on obtiendra

$$f(x,y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\sqrt{(x-\alpha^2)+(y-\beta^2)}}\left(\frac{\delta^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\varpi(\alpha,\beta). \quad (26)$$

D'une manière analogue on transformera (23) en

$$f(p,\varphi) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty} r\,dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{p^2+r^2-2pr\cos(\theta-\varphi)}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\delta^2}{\partial\theta^2}\right)\varpi(r,\theta). \quad (27)$$

NOTES.

NOTE 1. On a

$$u = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta\, d\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}} = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos m\theta\, d\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}}$$

$$= \frac{2a}{m}\int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta \sin\theta\, d\theta}{(\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta})^3}.$$

Mais, d'après un théorème bien connu de Jacobi, on aura

$$\sin(m \operatorname{arc}\cos x)$$

$$= (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} \cdot \frac{m}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)},$$

et par conséquent, en remplaçant dans l'expression ci-dessus $\cos\theta$ par x,

$$u = \frac{2a(-1)^{m-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} \frac{1}{(\sqrt{1+a^2-2ax})^3}\, dx.$$

En intégrant ici $(m-1)$ fois par parties, on obtiendra

$$u = 2a^m \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}\, dx}{(\sqrt{1+a^2-2ax})^{2m+1}},$$

ce qui est précisément l'expression de Lorenz, si l'on remplace de nouveau x par $\cos\theta$.

NOTE 2. Comme toute la suite de ce mémoire est fondée sur le théorème d'Abel (Oeuvres complètes, tome I, p. 27), je développerai ici la démonstration d'Abel, légèrement modifiée. On a, en remplaçant z par θz, θ par θx,

$$\int_0^x \frac{\theta^s d\theta}{(x-\theta)^{1-m}} \int_0^\theta \frac{z^{\alpha-1} dz}{(\theta-z)^m} = x^{\alpha+s} \int_0^1 \frac{\theta^{\alpha-m+s} d\theta}{(1-\theta)^{1-m}} \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} dz}{(1-z)^m}.$$

Si l'on suppose ici $0 < m < 1$, $\alpha - m + s > -1$, $\alpha > 0$, on aura

$$\int_0^1 \frac{\theta^{\alpha-m+s} d\theta}{(1-\theta)^{1-m}} = \frac{\Gamma(\alpha-m+s+1)\,\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha+s+1)},$$

$$\int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} dz}{(1-z)^m} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-m)}{\Gamma(\alpha-m+1)},$$

et par suite, comme

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi},$$

$$x^{\alpha+s} = \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+s+1)\,\Gamma(\alpha-m+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha-m+s+1)} \int_0^x \frac{\theta^s d\theta}{(x-\theta)^{1-m}} \int_0^\theta \frac{z^{\alpha-1} dz}{(\theta-z)^m}.$$

Si l'on pose ici $s = 0$, on aura

$$x^\alpha = \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_0^x \frac{d\theta}{(x-\theta)^{1-m}} \int_0^\theta \frac{\alpha z^{\alpha-1} dz}{(\theta-z)^m}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $f(\alpha)\,d\alpha$ et intégrant de $\alpha = a$ à $\alpha = b$, on aura

$$\int_a^b f(\alpha)\,x^\alpha\,d\alpha = \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_0^x \frac{d\theta}{(x-\theta)^{1-m}} \int_0^x \frac{\int_a^b \alpha f(\alpha)\,z^{\alpha-1}\,d\alpha}{(\theta-z)^m}\,dz.$$

Si l'on pose enfin $\int_a^b f(\alpha) x^\alpha d\alpha = \varphi(x)$, on obtiendra

$$(7) \qquad \varphi(x) = \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(x-\theta)^{1-m}} \int_0^\theta \frac{\varphi'(z)\, dz}{(\theta - z)^m}.$$

Mais ici se présente cette question: La fonction $\varphi(x)$ peut-elle être tout à fait arbitraire?

On reconnaît immédiatement qu'elle doit s'évanouir pour $x = 0$ et qu'elle doit être différentiable. Puis on reconnaît que, la formule (7) étant valable pour chaque terme d'une somme, elle l'est encore pour toute la somme. En conséquence, si $\varphi'(z)$ peut être développé en une série de puissances à exposants positifs, la série représentera $f(x) - f(0)$. On peut encore conclure de là que la série représentera $f(x) - f(0)$, si $f'(x)$ peut être développé en une série de Fourier.

Si l'on pose $s = -1$, on obtiendra

$$x^{\alpha-1} = \frac{\sin m\pi}{\pi} (\alpha - m) \int_0^x \frac{d\theta}{\theta (x-\theta)^{1-m}} \int_0^\theta \frac{z^{\alpha-1}\, dz}{(\theta - z)^m},$$

formule qui n'est valable que pour $\alpha > m$.

On en déduit

$$x^{\alpha-m} = \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_0^x \frac{d\theta \cdot x^{1-m}}{\theta (x-\theta)^{1-m}} \int_0^\theta \frac{(\alpha - m) z^{\alpha-m-1} \cdot z^m\, dz}{(\theta - z)^m},$$

puis, multipliant par $f(\alpha)\, d\alpha$, $f(\alpha)$ étant arbitraire, et intégrant entre les limites a et b,

$$\int_a^b f(\alpha) x^{\alpha-m} d\alpha$$

$$= \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_0^x \frac{d\theta\, x^{1-m}}{\theta (x-\theta)^{1-m}} \int_0^\theta \frac{z^m \left(\int_a^b f(\alpha)(\alpha - m) z^{\alpha-m-1} d\alpha \right) dz}{(\theta - z)^m}.$$

Si l'on pose $\int_a^b f(a)\, x^{a-m}\, da = \varphi(x)$, on aura

$$\varphi(x) = \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_0^x \frac{x^{1-m}\, d\theta}{\theta (x-\theta)^{1-m}} \int_0^\theta \frac{\varphi'(z)\, z^m}{(\theta - z)^m}\, dz.$$

Comme ci-dessus, $\varphi(x)$ n'est pas tout à fait arbitraire, mais doit s'évanouir pour $x = 0$. Si l'on remplace ici x, θ, z par $x^{-\frac{1}{m}}$, $\theta^{-\frac{1}{m}}$, $z^{-\frac{1}{m}}$ et $\varphi\left(x^{-\frac{1}{m}}\right)$ par $\varphi(x)$, on obtiendra

$$\varphi(x) = -\frac{\sin m\pi}{m\pi} \int_x^\infty \frac{\theta^{\frac{1-m}{m}}\, d\theta}{\left(\theta^{\frac{1}{m}} - x^{\frac{1}{m}}\right)^{1-m}} \int_\theta^\infty \frac{\varphi'(z)\, dz}{\left(z^{\frac{1}{m}} - \theta^{\frac{1}{m}}\right)^m}.$$

Pour $m = \frac{1}{2}$, on trouve la formule (12) de Lorenz. Ici $\varphi(x)$ doit s'évanouir pour $x = \infty$ et, du reste, on peut analyser la validité de cette formule comme celle de la formule (7). Si $\varphi(\infty)$ n'est pas égal à zéro, on doit remplacer $\varphi(x)$ par $\varphi(x) - \varphi(\infty)$.

NOTE 3. Au lieu de procéder comme le fait Lorenz, on peut se servir d'une autre méthode, qui me semble plus facile. On a

$$\varphi(p) = -\frac{2}{\pi} \int_p^\infty \frac{p\, dq}{q\sqrt{q^2 - p^2}} \int_q^\infty \frac{r\, \varphi'(r)\, dr}{\sqrt{r^2 - q^2}}.$$

Si l'on pose

$$\psi(q) = \int_q^\infty \frac{r\, \varphi'(r)\, dr}{\sqrt{r^2 - q^2}},$$

et si l'on remplace q par pq, on aura

$$\varphi(p) = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{dq}{q\sqrt{q^2 - 1}}\, \psi(pq),$$

$$\varphi'(p) = -\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-1}}\,\psi'(pq)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\,\psi'(q).$$

Si l'on remplace ici φ' par φ, on obtiendra la formule (11).

Par la même méthode on obtiendra

$$\psi'(q) = \frac{d}{dq}\int_q^\infty \frac{r\varphi(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}} = \frac{1}{q}\int_q^\infty \frac{r\,\dfrac{d(r\varphi(r))}{dr}}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr.$$

Mais on a

$$\frac{1}{q}\int_q^\infty \frac{r\,\dfrac{d(r\varphi(r))}{dr}}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr = \frac{1}{q}\int_q^\infty \frac{r^2\varphi'(r)+r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr$$

$$= q\int_q^\infty \frac{\varphi'(r)dr}{\sqrt{r^2-q}} + \frac{1}{q}\lim_{r=\infty}\sqrt{r^2-q^2}\,\varphi(r).$$

Si $\lim\limits_{r=\infty}\sqrt{r^2-q^2}\,\varphi(r) = 0$, on obtiendra l'expression de Lorenz.

NOTE 4. Les différentiations peuvent être exécutées comme dans la note 3.

NOTE 5. Dans la note 3, nous avons trouvé que

$$\frac{d\displaystyle\int_p^\infty \frac{q\psi(q)dq}{\sqrt{q^2-p^2}}}{dp} = \frac{1}{p}\int_p^\infty \frac{q\,\dfrac{d(q\psi(q))}{dq}}{\sqrt{q^2-p^2}}\,dq$$

$$= p\int_p^\infty \frac{\psi'(q)}{\sqrt{q^2-p^2}}\,dq, \qquad \text{(I)}$$

si $\left|\psi(q)\sqrt{q^2-p^2}\right|_p^\infty = 0$.

De la même manière on obtient

$$\frac{d\int_0^q \frac{r\varpi(r)}{\sqrt{q^2-r^2}}\,dr}{dq} = \frac{1}{q}\int_0^q \frac{r\frac{d(r\varpi(r))}{dr}\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}}$$

$$= q\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}}. \qquad \text{(II)}$$

Si l'on se sert de ces deux formules, on obtiendra

$$\frac{d}{dp}\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\int_0^q \frac{r\varpi(r)}{\sqrt{q^2-r^2}}\,dq = \frac{1}{p}\int_p^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\frac{d}{dq}\int_0^q \frac{r\varpi(r)}{\sqrt{q^2-r^2}}\,dr,$$

si dans la formule (I) on pose

$$\psi(q) = \frac{1}{q}\int_0^q \frac{r\varpi(r)}{\sqrt{q^2-r^2}}\,dr,$$

et si l'on se sert ensuite de la formule (II), l'expression prendra la forme

$$\frac{1}{p}\int_p^\infty \frac{q^2\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}}.$$

En exécutant sur cette expression l'opération $\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\cdot p$ on obtiendra

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\int_p^\infty \frac{q^2\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}},$$

et, si dans la formule (I) on pose

$$\psi(q) = q\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}},$$

on trouvera

$$\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\frac{d}{dq}\,q\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}},$$

où l'on suppose que

$$\left| q\sqrt{q^2-p^2}\int_0^q \frac{\varpi'(r)\,dr}{\sqrt{q^2-r^2}} \right|_p^\infty = 0.$$

Si l'on se sert de nouveau de la formule (II), on retrouvera l'expression (14).

NOTE 6. On peut démontrer la proposition de Lorenz d'une manière différente et plus facile.

Si l'on a donné la densité superficielle $f(x, y)$ de chaque point (x, y) du plan $z = 0$, le potentiel d'un point arbitraire du plan sera

$$\varpi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha\, d\beta \cdot f(\alpha, \beta)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}},$$

et de même le potentiel d'un point arbitraire de l'espace sera

$$\Pi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha\, d\beta\, f(\alpha, \beta)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2}}.$$

Mais en supposant que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\Pi\, dx\, dy\, dz$$

soit une quantité finie, le théorème de Lord Kelvin met en évidence qu'il n'existe qu'une seule fonction satisfaisant, comme Π, entre les limites de l'intégrale à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, et prenant pour $z = 0$ les mêmes valeurs $\varpi(x, y)$ que Π. Or la fonction

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varpi(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2}}$$

satisfait à ces conditions. Par conséquent, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha\,d\beta\,f(\alpha,\beta)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2}}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varpi(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2}}$$

et comme

$$\left|-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha\,d\beta\,f(\alpha,\beta)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2}}\right|^{z=0}=f(x,y),$$

$$f(x,y)=\left|\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varpi(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2}}\right|^{z=0}.$$

Mais comme

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}=0,$$

on aura

$$f(x,y)=-\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha\,d\beta\,\varpi(\alpha,\beta)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}.$$

SUR L'ÉVALUATION DES AIRES.

SUR L'ÉVALUATION DES AIRES.

MATHEMATISK TIDSSKRIFT 1864, P. 33—38.

L'évaluation de l'aire d'une surface peut être ramenée à l'évaluation du volume d'un corps infiniment mince, de même forme que la surface, car le volume divisé par l'épaisseur du corps, qui est supposée partout la même, donnera l'aire de la surface. Comme cette conception peut offrir des avantages pratiques, ainsi que le montre, à mon avis, l'exemple suivant, j'espère qu'il ne sera dépourvu d'intérêt d'en faire une étude plus détaillée.

L'équation de la surface donnée est

$$u = F(x, y, z) = 0.$$

$x+h$, $y+k$, $z+l$ étant les coordonnées d'un point situé infiniment près du point x, y, z sur la normale à la surface en ce point, on aura

$$F(x+h,\ y+k,\ z+l) = \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \frac{\partial u}{\partial z}l,$$

et de plus

$$\frac{h}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{k}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{l}{\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{\varepsilon}{v},$$

où

$$\varepsilon = \sqrt{h^2+k^2+l^2},$$

et

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

ε est la distance du point à la surface.

Au moyen des valeurs de h, k, l, déterminées de cette manière, on obtient

$$F(x+h,\ y+k,\ z+l) = v\varepsilon.$$

Si l'on se déplace de cette manière à une petite distance de la surface, dans la direction de la normale à un nouveau point x, y, z, la valeur de la fonction $\frac{u}{v}$ variera de 0 à ε, et, pour un point situé sur cette normale, à une plus petite distance de la surface, la valeur de $\frac{u}{v}$ sera comprise entre 0 et ε.

Pour chaque point x, y, z appartenant au corps infiniment mince ayant même forme que la surface et une épaisseur constante ε, on aura donc

$$\varepsilon > \frac{u}{v} > 0.$$

Le volume d'un corps peut être obtenu par sommation de tous les éléments de l'espace illimité, multipliés par un facteur qui est égal à 1 pour tous les éléments appartenant au corps et égal à zéro pour tous les éléments situés en dehors du corps. Comme facteur de cette nature, on peut prendre, par exemple, l'intégrale définie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{d\alpha \cdot h}{\left(\frac{u}{v}-\alpha\right)^2 + h^2} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon v - u}{hv} + \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{hv}\right],$$

si l'on fait, après l'intégration, converger h vers zéro; car on aura dans ce cas

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon v-u}{hv}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\text{ pour }\varepsilon>\dfrac{u}{v}\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}\text{ pour }\varepsilon<\dfrac{u}{v},\end{cases}$$

et

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{hv}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\text{ pour }\dfrac{u}{v}>0\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}\text{ pour }\dfrac{u}{v}<0.\end{cases}$$

Les deux termes sont donc en même temps égaux à $\frac{\pi}{2}$, si

$$\varepsilon>\frac{u}{v}>0;$$

au contraire ils seront de signes contraires pour toutes les autres valeurs de $\frac{u}{v}$, et par suite ils se détruiront.

En conséquence, on aura

$$\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{d\alpha\, v^2 h}{(u-\alpha v)^2+v^2h^2}\right]^{h=0}=\begin{cases}1\\ 0\end{cases}$$

selon que le point x, y, z est situé à l'intérieur du corps ou à l'extérieur.

Le volume du corps se trouve en multipliant cette intégrale définie par $dx\,dy\,dz$ et intégrant dans tout l'espace illimité; l'aire de la surface est donc ce volume divisé par l'épaisseur ε du corps. Par conséquent on aura

$$A=\frac{1}{\varepsilon\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_0^{\varepsilon}\frac{d\alpha\cdot v^2 h}{(u-\alpha v)^2+v^2h^2}.$$

Mais, comme ε est une quantité infiniment petite et comme on a, en général, pour une fonction arbitraire $\varphi(\varepsilon)$,

$$\lim \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(0)}{\varepsilon} = \psi'(0),$$

on aura

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{v^2 h}{u^2 + v^2 h^2}. \tag{1}$$

Il va sans dire, qu'on ne doit pas intégrer par rapport à x entre $-\infty$ et $+\infty$, mais seulement entre les limites qui correspondent à deux plans donnés, dans le cas où l'on ne cherche pas l'aire totale de la surface, mais bien l'aire limitée par deux plans, que nous supposerons parallèles au plan des yz.

Dans l'application de la formule (1) à l'évaluation d'une aire, on ne doit pas perdre de vue que h est une quantité infiniment petite et que, par suite, tous les éléments de l'intégrale s'évanouissent, à moins que u soit en même temps infiniment petit. C'est pourquoi l'on peut, soit conserver la forme des coefficients de h et h^2 comme fonctions de trois variables, soit exprimer ces coefficients en fonction de deux variables en éliminant la troisième variable au moyen de l'équation $u = 0$.

La formule trouvée pour A peut aisément être ramenée à la forme ordinaire, si nous multiplions le numérateur et le dénominateur par $\frac{\partial u}{\partial z}$ et si nous posons

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{[v^2] \frac{\partial u}{\partial z} h}{\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right] (u^2 + [v^2] h^2)},$$

où les crochets [ ] indiquent que z est éliminée au moyen de l'équation $u = 0$.

En intégrant par rapport à z, nous obtiendrons

$$\int dz \frac{[v]\frac{\partial u}{\partial z}h}{u^2+[v^2]h^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{[v]h},$$

intégrale qui est égale à π toutes les fois que u prend la valeur $u = 0$, z parcourant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Par conséquent, on aura

$$A = \int dx \int dy \frac{[v]}{\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]}. \tag{2}$$

en même temps que $u = 0$, de manière que les limites de l'intégrale deviendront les valeurs extrêmes de x et y, admissibles sous cette condition.

Comme exemple de l'application de la formule (1), nous prendrons l'évaluation de l'aire d'un ellipsoïde.

Nous aurons ici

$$u = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0,$$

et, par suite,

$$v^2 = 4\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right].$$

Si nous posons

$$\frac{x}{a^2} = r\cos\theta, \quad \frac{y}{b^2} = r\sin\theta\cos\omega, \quad \frac{z}{c^2} = r\sin\theta\sin\omega,$$

nous obtiendrons

$$dx\,dy\,dz = a^2b^2c^2r^2\sin\theta\,d\theta\,dr\,d\omega,$$

de manière que l'aire de la surface totale de l'ellipsoïde deviendra, l'intégrale étant étendue à tout l'espace illimité,

$$A = \frac{a^2 b^2 c^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \, \frac{4 r^2 h}{(\alpha^2 r^2 - 1)^2 + 4 r^2 h^2},$$

où

$$\alpha^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta \cos^2\omega + c^2 \sin^2\theta \sin^2\omega.$$

Comme tous les éléments de cette intégrale s'évanouissent à moins que $\alpha^2 r^2 - 1 = 0$ et par suite $r = \frac{1}{\alpha}$, on peut substituer cette valeur dans les coefficients de h et de h^2, et l'on pourra de plus poser

$$\alpha^2 r^2 - 1 = (\alpha r + 1)(\alpha r - 1) = 2(\alpha r - 1).$$

De cette manière on obtiendra

$$A = \frac{a^2 b^2 c^2}{\pi} \int_0^\infty dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \, \frac{h}{\alpha^2 (\alpha^2 (\alpha r - 1)^2 + h^2)},$$

formule qui, après l'intégration par rapport à r, se réduira à

$$A = a^2 b^2 c^2 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{\alpha^4},$$

Si l'on introduit ici la valeur de α indiquée ci-dessus et si l'on effectue l'intégration d'abord par parties par rapport à θ et puis complètement par rapport à ω, on parviendra sans difficulté aux résultats connus. Le résultat peut s'obtenir plus facilement sous une autre forme de la manière suivante.

On a

$$\frac{\partial \frac{1}{\alpha^2}}{\partial (a^2)} + \frac{\partial \frac{1}{\alpha^2}}{\partial (b^2)} + \frac{\partial \frac{1}{\alpha^2}}{\partial (c^2)} = -\frac{1}{\alpha^4},$$

et par suite

$$A = -\frac{a^2b^2c^2}{2}\left(\frac{\partial}{a\,\partial a}+\frac{\partial}{b\,\partial b}+\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{a^2}.$$

En intégrant d'abord par rapport à ω, et appliquant la formule

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{m^2\cos^2\omega+n^2} = \frac{2\pi}{n\sqrt{m^2+n^2}},$$

on obtiendra

$$\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{a^2} = 2\pi\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\sqrt{a^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta}},$$

intégrale qui peut être immédiatement mise sous forme d'intégrale elliptique par la substitution

$$\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{tg}\psi,$$

où nous supposons $a > b > c$. L'intégrale ci-dessus se réduira ainsi à

$$4\pi\int_0^\mu \frac{d\psi}{\sqrt{b^2(a^2-c^2)-a^2(b^2-c^2)\sin^2\psi}},$$

où $\mu = \arccos\frac{c}{a}$. On aura donc

$$A = -2\pi a^2b^2c^2\left(\frac{\partial}{a\,\partial a}+\frac{\partial}{b\,\partial b}+\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)\int_0^\mu \frac{d\psi}{\sqrt{b^2(a^2-c^2)-a^2(b^2-c^2)\sin^2\psi}},$$

ce qui peut, avec la notation ordinaire des intégrales elliptiques

$$F(k,\mu) = \int_0^\mu \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},\quad k = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

s'écrire de la façon suivante

$$A = -2\pi a^2b^2c^2\left(\frac{\partial}{a\,\partial a}+\frac{\partial}{b\,\partial b}+\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)\frac{F(k,\mu)}{b\sqrt{a^2-c^2}}.$$

SUR

LE MOUVEMENT PERMANENT

D'UN LIQUIDE.

SUR LE MOUVEMENT PERMANENT D'UN LIQUIDE.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK 1866, P. 65—74.

Quand le mouvement d'un liquide parfait est devenu permanent, la vitesse du liquide est en chaque point constante en direction et en grandeur, et toutes les particules du liquide qui passent par le même endroit doivent avoir le même mouvement et décrire la même courbe. Il est bien connu que la pression p exercée sur chaque particule d'une telle courbe peut être déterminée, à savoir par l'équation

$$p = -\rho g z - \tfrac{1}{2}\rho h^2 + C,$$

où ρ est la densité constante du liquide, g la pesanteur, qui est supposée la seule force accélératrice, agissant dans la direction négative de l'axe des z et h la vitesse. Si la constante C est éliminée au moyen des valeurs correspondantes p_0, h_0, z_0 d'un point donné de la courbe, l'équation peut s'écrire

$$p - p_0 = \rho g(z - z_5) - \tfrac{1}{2}\rho(h^2 - h_0^2). \qquad (1)$$

Mais tandisque la pression est de cette manière déterminée pour tous points de la même courbe, décrite par une particule du liquide, l'équation (1) n'apprend rien sur la pression en général d'un point du liquide, car les constantes peuvent varier d'une manière par-

faitement inconnue, dans le passage d'une courbe à une autre.

Nous ne pouvons, par exemple, rien conclure de cette équation, pour la pression d'un liquide qu'on a fait tourner autour d'un axe fixe, et la supposition que toutes les constantes fussent les mêmes pour toutes les courbes amènerait à des résultats faux.

Au contraire, l'équation a, comme on sait, été employée avantageusement à la détermination de la pression en tout point d'un liquide qui, par une ouverture très petite s'écoule d'un vase, et c'est pourquoi l'on doit rechercher dans quels cas il est permis de faire une telle application de l'équation.

Les mouvements permanents peuvent être divisés en deux espèces, à savoir les mouvements en courbes fermées et en courbes infinies. Les premiers ont lieu dans le cas d'un mouvement permanent proprement dit, produit en un espace fini et limité; car chaque particule du liquide doit ici, pendant la durée infinie du mouvement, finir par repasser en un point où elle est déjà passée antérieurement et, par suite, décrire une courbe fermée. Il est évident qu'on ne peut pas, dans ce cas, employer l'équation (1) à la détermination de la pression en général.

Dans le second cas, où les espaces parcourus deviennent infinis, ce qui suppose le liquide illimité, le mouvement peut, soit s'étendre à toutes les particules, et dans ce cas nous ne savons encore rien de la loi d'après laquelle la pression varie d'une courbe à une autre, soit être limité par la condition de n'atteindre à une grandeur appréciable qu'à l'intérieur d'une portion limitée

de l'espace, tandis qu'il s'évanouit au voisinage des limites de ce domaine.

Dans le dernier cas, la pression peut être déterminée en général; car, dans ce cas, chaque particule du liquide qui participe au mouvement à dû, dans la suite infinie des temps, passer en un point de l'espace où le mouvement était infiniment petit; aussi pouvons-nous, dans l'équation (1), égaler h_0 à zéro, tandis qu'on, a d'après la loi hydrostatique,

$$p_0 = \varpi - \rho g z_0,$$

où ϖ est la pression extérieure sur le liquide, le plan des xy passant par la surface du liquide dans le même endroit.* Nous supposons, dans ce qui suit, que cette pression est constante. * NOTE 1.

On aura donc

$$p - \varpi = -\rho g z - \tfrac{1}{2}\rho h^2, \qquad (2)$$

équation qui ne contient plus de constante susceptible de varier d'une courbe à l'autre et par laquelle la pression est, en conséquence, déterminée pour tous les points du liquide. Il va sans dire que la surface libre et toutes les surfaces de niveau sont déterminées par cette équation, c'est-à-dire par la vitesse h.

On peut évidemment faire une application approximative de ce résultat dans des cas très nombreux, savoir dans tous les cas où le mouvement d'un liquide n'est constant que pendant un certain temps et où, en outre, les courbes décrites par les particules peuvent être considérées comme ayant pris naissance à des endroits où le mouvements est très faible, ce qui, par exemple, a lieu pour un liquide qui s'écoule d'un grand vase par

un petit orifice placé au fond. Il faut pourtant que le mouvement du liquide soit négligeable à une distance suffisamment grande de cet orifice, et que par conséquent le mouvement du liquide ne soit pas un mouvement de rotation.

De plus les conditions peuvent être réalisées en d'autres cas, comme par les mouvements des corps parfaitement liquides dans des canaux, dans des fontaines, etc. Mais il va sans dire que, si l'on veut appliquer la théorie aux liquides réels, on doit, selon la nature du problème, tenir plus ou moins de compte du frottemeut.

A présent nous pouvons avec sûrcté faire un pas en avant, en retenant les conditions de validité de l'équation trouvée.

Si l'on pose pour abréger

$$-\frac{1}{\rho}(p-\varpi)-gz = q,$$

l'équation (2) se réduira à

$$q = \tfrac{1}{2}h^2 = \tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2), \tag{3}$$

où u, v, w sont les composantes de la vitesse suivant les trois axes. Les équations générales de l'hydrodynamique, dans le cas des liquides en mouvement permanent, peuvent, avec les notations introduites ici, s'écrire

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial x} &= u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},\\
\frac{\partial q}{\partial y} &= u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},\\
\frac{\partial q}{\partial z} &= u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Si, de même, on déduit de (3) les dérivées de q, on obtiendra par comparaison

$$v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

etc., par où l'on parvient à ces deux équations

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}}{u}=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}}{v}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}}{w}. \tag{5}$$

On a de plus l'équation de continuité

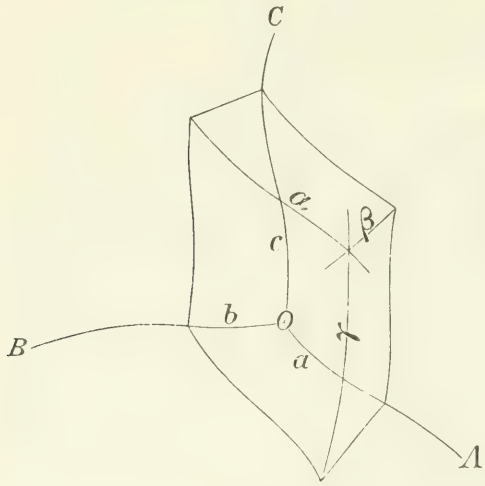
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{6}$$

On peut remarquer le cas particulier où les numérateurs des équations (5) peuvent s'évanouir et où, par suite, u, v, w deviennent les dérivées de la même fonction par rapport à x, y, z, cas qui a été considéré à plusieurs reprises. Il est bon de remarquer que c'est précisément le cas d'un liquide qui s'écoule d'un vase par une ouverture circulaire, sous les conditions énoncées ci-dessus; car on trouve facilement dans ce cas $\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0$*, et par conséquent les autres numérateurs des équations (5) doivent aussi s'évanouir. * NOTE 1.

Pour mieux mettre en évidence le sens des équations, nous introduirons un nouveau système de coordonnées, composé de trois systèmes de trajectoires orthogonales, qui par conséquent se coupent partout sous des angles droits.

Soient pour axes coordonnés les lignes d'intersection de trois surfaces fixes, savoir OA, OB, OC, O étant l'origine; la position d'un point est déterminée par les

trois segments a, b, c détachés sur les trois axes par les surfaces trajectoires qui passent au point considéré.



Soient α, β, γ les arcs des courbes d'intersection des trois surfaces trajectoires, comptés du point aux surfaces fixes coordonnées. Leurs prolongements, les éléments $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, font entre eux des angles droits, et soient l_1, l_2, l_3 les cosinus des angles qu'ils font avec l'axe des x d'un système plan et rectangulaire de coordonnées; m_1, m_2, m_3 ceux des angles qu'ils font avec l'axe des y; n_1, n_2, n_3 ceux relatifs à l'axe des z. C'est ce que représente le tableau ci-dessous

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & d\alpha & d\beta & d\gamma \\ \hline x & l_1 & l_2 & l_3 \\ \hline y & m_1 & m_2 & m_3 \\ \hline z & n_1 & n_2 & n_3 \\ \hline \end{array}$$

où, comme on sait, la somme des carrés des trois quantités qui se trouvent dans une rangée horizontale ou verticale est l'unité, tandis que la somme des produits de deux quantités voisines dans deux rangées parallèles s'évanouit.

On aura donc, si a, b, c sont choisis comme variables indépendantes et si φ désigne une fonction quelconque de a, b, c,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Si l'on pose ensuite

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \varepsilon_1, \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} = \varepsilon_2, \quad \frac{\partial c}{\partial \gamma} = \varepsilon_3{}^*,$$ * NOTE 3.

on aura

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \varepsilon_1 l_1, \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \varepsilon_2 l_2, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \varepsilon_3 l_3.$$

Par conséquent, on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varepsilon_1 l_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \varepsilon_2 l_2 \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \varepsilon_3 l_3 \frac{\partial \varphi}{\partial c}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \varepsilon_1 m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \varepsilon_2 m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \varepsilon_3 m_3 \frac{\partial \varphi}{\partial c}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \varepsilon_1 n_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \varepsilon_2 n_2 \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \varepsilon_3 n_3 \frac{\partial \varphi}{\partial c}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

où les deux dernières équations sont formées par symétrie. Si l'on multiplie ces équations respectivement par l_1, m_1, n_1, et qu'on les additionne, on obtiendra la première des équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= l_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial b} &= l_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \varepsilon_3 \frac{\partial \varphi}{\partial c} &= l_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

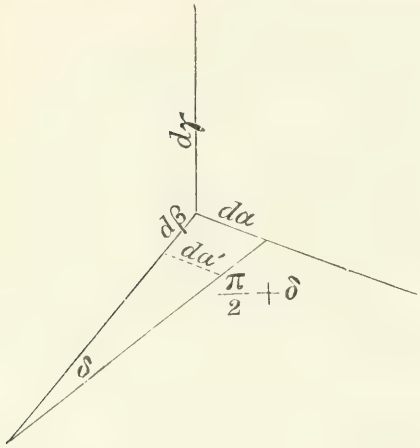
les deux dernières s'obtiennent d'une manière analogue.

Du reste, on peut encore déduire immédiatement ces trois équations.

Il faut encore se servir du développement suivant. Comme les trois systèmes se coupent suivant leurs lignes de courbure, ainsi que l'a démontré Lamé, les deux droites qui, par exemple, sont menées normalement à la surface $\alpha\gamma$ aux deux extrémités de l'élément $d\alpha$ se

couperont en un point. Si δ est l'angle infiniment petit formé par ces deux lignes, $\frac{\delta}{d\alpha}$ sera la courbure de l'arc α dans la surface $\alpha\gamma$.* Tandisque l'une des deux droites fait un angle droit avec $d\alpha$, l'autre fera l'angle $\frac{\pi}{2}+\delta$ avec le prolongement de cet élément et, avec les axes rectangulaires, des angles dont les cosinus sont $l_2+\frac{\partial l_2}{\partial\alpha}d\alpha$, $m_2+\frac{\partial m_2}{\partial\alpha}d\alpha$, $n_2+\frac{\partial n_2}{\partial\alpha}d\alpha$.

* NOTE 4.



Par conséquent on aura

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) = l_1\left(l_2+\frac{\partial l_1}{\partial\alpha}d\alpha\right)+m_1\left(m_2+\frac{\partial m_2}{\partial\alpha}d\alpha\right)$$
$$+n_1\left(n_2+\frac{\partial n_2}{\partial\alpha}d\alpha\right),$$

et, par suite, comme δ est infiniment petit et

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 = 0,$$

$$\frac{\delta}{d\alpha} = -\left(l_1\frac{\partial l_2}{\partial\alpha}+m_1\frac{\partial m_2}{\partial\alpha}+n_1\frac{\partial n_2}{\partial\alpha}\right),$$

ou bien

$$\frac{\delta}{d\alpha} = \varepsilon_1\left(l_2\frac{\partial l_1}{\partial\alpha}+m_2\frac{\partial m_1}{\partial\alpha}+n_2\frac{\partial n_1}{\partial\alpha}\right). \qquad (9)$$

Mais cette courbure peut encore être déterminée d'une autre manière; car on trouve facilement par la figure

$$\delta = \frac{d\alpha-d\alpha'}{d\beta} = -\frac{d(d\alpha)}{d\beta}.$$

Si l'on introduit ici les valeurs

$$d\alpha = \frac{da}{\varepsilon_1} \quad \text{et} \quad d\beta = \frac{db}{\varepsilon_2},$$

on trouvera

$$\delta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}\frac{d\varepsilon_1}{db}da,$$

et, par conséquent, la courbure est déterminée par

$$\frac{\delta}{d\alpha} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial b}. \tag{10}$$

Les deux équations (9) et (10) donnent donc

$$l_2\frac{\partial l_1}{\partial a} + m_2\frac{\partial m_1}{\partial a} + n_2\frac{\partial n_1}{\partial a} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial b}. \tag{11}$$

Ces considérations finies, nous reviendrons à nos équations hydrodynamiques (4), et, supposant que les courbes α soient les chemins parcourus par les particules du liquide*, nous poserons * NOTE 5.

$$u = hl_1, \quad v = hm_1, \quad w = hn_1.$$

On doit ici remarquer que les courbes α ne déterminent pas seulement les surfaces $\beta\gamma$, qui partout font des angles droits avec ces courbes, mais encore les deux autres systèmes de surfaces, car ces deux systèmes doivent passer par les lignes de courbure des surfaces $\beta\gamma$. D'après (7) on a en général

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} = h\varepsilon_1\frac{\partial\varphi}{\partial a},$$

de manière que les équations (4) se transforment en

$$\frac{\partial q}{\partial x} = h\varepsilon_1\frac{\partial(hl_1)}{\partial a}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = h\varepsilon_1\frac{\partial(hm_1)}{\partial a}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = h\varepsilon_1\frac{\partial(hn_1)}{\partial a},$$

d'où l'on déduira au moyen des équations (8) et des relations connues entre les quantités l, m, n

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial q}{\partial a} &= h\varepsilon_1 \frac{\delta h}{\partial a}, \\ \varepsilon_2 \frac{\partial q}{\partial b} &= h^2 \varepsilon_1 \left(l_2 \frac{\partial l_1}{\partial a} + m_2 \frac{\partial m_1}{\partial a} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial a} \right), \\ \varepsilon_3 \frac{\partial q}{\partial c} &= h^2 \varepsilon_1 \left(l_3 \frac{\partial l_1}{\partial a} + m_3 \frac{\partial m_1}{\partial a} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial a} \right), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Si l'on compare la seconde équation (12) avec l'expression (9) de la courbure de la courbe a dans la surface $a\gamma$, on reconnaît que le second membre de (12) est le carré de la vitesse, multiplié par cette courbure, et par conséquent égal à la force centrifuge dans la direction opposée à $d\beta$, résultat qui, du reste, pouvait être prévu. Une remarque analogue peut être faite sur la troisième équation ci-dessus. Ces deux équations peuvent de plus au moyen de (11) être transformées en

$$\frac{\partial q}{\partial b} = \frac{h^2}{\varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}, \quad \frac{\partial q}{\partial c} = \frac{h^2}{\varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c}. \tag{13}$$

L'équation de continuité (6) peut être transformée d'une manière analogue; mais on obtient plus vite le même résultat, si l'on remarque que, d'après la continuité, $h\,d\beta\,d\gamma$ doit être invariable pour tous les points d'une courbe décrite par un courant et par conséquent fonction de b et c seuls. Ainsi l'on peut poser

$$h = f(b, c)\,\varepsilon_2 \varepsilon_3. \tag{14}$$

Si maintenant nous considérons l'espèce particulière de mouvement pour laquelle est valable l'équation (3), $q = \frac{1}{2} h^2$, nous trouverons, en introduisant cette valeur de q dans les équations ci-dessus, que la première équa-

tion devient identique et qu'inversement elle entraîne, par intégration, l'équation (1), tandis que les équations (13) donneront

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial b} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}, \quad \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial c} = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c}, \tag{15}$$

d'où l'on déduit par intégration

$$h = F(a)\varepsilon_1, \tag{16}$$

F étant une fonction arbitraire.

Ce résultat qui, combiné avec (14), fournit les lois du mouvement et qui le détermine complétement, les conditions nécessaires étant données, peut être rendu plus intelligible par les considérations suivantes.

Le mouvement d'une particule d'eau peut être considéré comme une rotation autour d'un axe parallèle à $d\gamma$, passant par le centre de courbure du courant situé sur le prolongement de $d\beta$ et, de même, comme une rotation autour d'un axe parallèle à $d\beta$ et passant par l'autre centre de courbure, situé sur le prolongement de $d\gamma$. La vitesse angulaire de la première rotation est, si l'on se sert de la notation δ employée ci-dessus, $\frac{\delta}{dt}$ ou $h\frac{\delta}{da}$, si da est le chemin parcouru par une particule d'eau dans le temps dt. Si l'on s'imagine qu'une particule d'eau de la courbe a est liée par une ligne $d\beta$, normale à la courbe, avec la particule la plus proche de la surface $a\beta$, cette ligne se déplacera dans l'élément de temps dt et formera l'angle $-\frac{\partial h}{\partial \beta}dt$ avec sa position primitive, la direction positive étant comptée de la même manière que ci-dessus, pour la détermination de la courbure. La vitesse angulaire de la rotation de cette

ligne est donc

$$-\frac{\partial h}{\partial \beta} = -\frac{\partial h}{\partial b}\varepsilon_2.$$

Mais, d'après l'équation (15), combinée avec (10), on a

$$-\frac{\partial h}{\partial b}\varepsilon_2 = -h\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} = -h\frac{\delta}{da},$$

d'où ressort ce résultat remarquable, que cette vitesse angulaire est précisement égale et opposée à celle de la particule autour du centre de courbure situé sur le prolongement de $d\beta$. Une proposition analogue est valable pour la rotation autour de l'autre centre de courbure de la courbe du courant, et ces deux résultats, qui peuvent remplacer les équations (15), contiennent donc, conjointement avec l'équation de continuité, toutes les lois du mouvement du liquide. Un corps flottant librement dans le courant doit donc, en général, éprouver une rotation inverse de celle du courant, ce qui est précisément le contraire de ce qui arrive à un liquide, lorsqu'il éprouve une rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Les expressions (14) et 16) de la vitesse peuvent être employées à la détermination graphique approximative, abstraction faite du frottement, d'un courant dans un canal. Si l'on suppose que le fond est plan, il peut être pris pour le plan coordonné fixe AB, et comme les courbes des courants ne diffèrent que peu du plan horizontal on peut, comme première approximation, supposer $d\gamma$ constant et égal à dc pour tous points de la surface AB. On a donc ici $\varepsilon_3 = 1$ et le mouvement sera d'après (14) et (15) déterminé par

$$h = F(a)\varepsilon_1 = f(b)\varepsilon_2.$$

Pour $b = 0$, on a $\varepsilon_1 = 1$, et pour $a = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, de manière qu'on peut encore écrire ces équations sous la forme

$$h = [h]^{b=0} \frac{\partial a}{\partial \alpha} = [h]^{a=0} \frac{\partial b}{\partial \beta}.$$

Qu'on imagine des segments égaux à $d\alpha$ et db portés sur les axes fixes, et inversement proportionnels aux vitesses, de manière qu'on ait

$$[h]^{b=0} d\alpha = [h]^{a=0} db;$$

alors on aura $d\alpha = d\beta$.

Les trajectoires orthogonales, dont l'une représente les directions des courants, formeront donc partout des carrés, si leurs traces sur les axes fixes sont marquées à intervalles infiniment petits, inversement proportionnels aux vitesses aux points considérés, et les côtés de ces carrés seront aussi inversement proportionnels aux vitesses.

Par conséquent, si les conditions limites nécessaires sont données, on pourra déterminer graphiquement la direction et la vitesse du courant; mais il va sans dire qu'on doit ici remplacer les carrés infiniment petits par des carrés petits, mais finis, et construire les trajectoires orthogonales de manière à satisfaire aux conditions données. Il faut pourtant remarquer que cette méthode de construction peut facilement entraîner une accumulation d'erreurs et par suite, conduire à des résultats incertains. C'est pourquoi l'on ne devra l'employer qu'avec précaution.

NOTES.

NOTE 1. On suppose qu'une partie de la surface est en repos et par conséquent plane, et qu'on fait passer le plan des xy par cette partie de la surface.

NOTE 2. La vitesse sera en chaque point dirigée suivant une droite rencontrant la verticale qui passe par le centre de l'orifice et ne dépendra que des distances du point considéré à cette verticale et à la surface libre.

NOTE 3. On ne désigne pas ici par $\frac{\partial a}{\partial \alpha}$ la dérivée partielle par rapport à α, β et γ étant constants, mais la dérivée suivant la direction de $a \cdot \frac{\partial b}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial c}{\partial \gamma}$ ont des significations analogues.

NOTE 4. Lorenz parle ici et dans ce qui suit de la courbure d'une courbe dans une surface sur laquelle elle est tracée. Il résulte de son texte qu'il a en vue la courbure de la projection de la courbe sur le plan tangent à la surface au point considéré.

De même, quand il parle des divers centres de courbure d'une courbe, il entend les centres de courbure des projections de la courbe sur les différents plans qui passent par la tangente au point considéré.

NOTE 5. Lorenz dit qu'il prend pour courbes α les chemins parcourus par les particules du liquide.

C'est en général impossible; car on ne peut pas, en général, construire une surface qui passe par un point donné d'une des courbes et qui coupe ces courbes partout à angle droit: même dans le cas où l'on peut construire une famille de surfaces jouissant de ces propriétés, elles ne peuvent, en général, appartenir à un système de surfaces orthogonales, à moins que leur paramètre ne satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles.

Si les surfaces de niveau $q =$ const. sont perpendiculaires aux courbes du courant, on doit avoir

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x}}{u} = \frac{\frac{\partial q}{\partial y}}{v} = \frac{\frac{\partial q}{\partial z}}{w},$$

ce qui entraîne

$$u\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0,$$

équation qui est incompatible avec l'équation (5), à moins que les numérateurs de (5) ne s'évanouissent.

SUR LA RÉSOLUTION

DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

AU MOYEN DE SÉRIES ET D'INTÉGRALES DÉFINIES.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES AU MOYEN DE SÉRIES ET D'INTÉGRALES DÉFINES.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK 1867, P. 71—80.

Soit proposée l'équation

$$x = a + y\varphi(x), \tag{1}$$

à résoudre par rapport à x; on pourra, comme on sait, se servir de la série de Lagrange

$$f(x) = f(a) + \varphi(a)f'(a)\frac{y}{1} + \ldots + \frac{d^{n-1}(\varphi(a)^n f'(a))}{d\,a^{n-1}}\frac{y^n}{n!} + \ldots \tag{2}$$

qui exprime non seulement x, mais une fonction quelconque $f(x)$ au moyen de a et de y. Dans l'application de cette série, on rencontrera pourtant une difficulté double, 1° parce que la série devient souvent divergente; 2° parce qu'elle ne donne qu'une seule racine de l'équation. C'est pourquoi il ne sera pas sans intérêt d'examiner la question plus en détail. Il me semble important avant tout d'obtenir des séries convergentes pour *toutes les racines* des *équations algébriques*, dont la résolution n'est en général qu'approximative.

Pour appliquer la série de Lagrange à la résolution de l'équation

$$x^q - x + a = 0, \tag{3}$$

seul type d'équation algébrique dont nous nous occuperons ici, nous devons dans l'équation (2) poser

$$y = 1, \quad \varphi(a) = a^q,$$

et x, ou une puissance de x, sera donc déterminée par la série

$$x^p = a^p + pa^{p+q-1} + \ldots$$
$$+ p\frac{(p+nq-1)(p+nq-2)\ldots(p+n(q-1)+1)}{n!} a^{p+n(q-1)} + \ldots \quad (4)$$

Si l'on se sert des signes de sommation et des fonctions Γ, cette série peut être écrite sous la forme

$$x^p = p\sum \frac{\Gamma(p+nq)}{\Gamma(p+n(q-1)+1)\,\Gamma(n+1)} a^{p+n(q-1)}, \quad (5)$$

n devant parcourir toutes les valeurs positives et entières de 0 jusqu'à ∞. On peut en outre obtenir une expression analogue pour $\log x$ au moyen de l'équation ci-dessus, par exemple en faisant converger p vers 0. Si p est négatif, la formule est encore valable, pourvu que la fonction Γ soit définie de manière à vérifier encore la formule

$$a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$$

pour a négatif; car alors les valeurs de la fonction pour $a < 0$ sont déterminées par ses valeurs pour $a > 0$.

La série trouvée de cette manière devient pourtant divergente aussitôt que la valeur numérique de a dépasse une certaine limite, et l'on trouve comme à l'ordinaire, que la condition de convergence est, abstraction faite du signe,

$$a^{q-1} < (q-1)^{q-1} : q^q. \quad (6)$$

De plus la série n'exprime que la racine qui s'évanouit en même temps que a, tandis que l'équation a encore $q-1$ racines différentes qui ne s'évanouissent pas avec a.

Pour trouver un développement convergent qui représente toutes les racines de l'équation, nous partirons de l'équation plus générale

$$1 = \frac{y}{\varphi(x)} + \frac{z}{\psi(x)}, \tag{7}$$

d'où nous déduirons pour toute fonction de x deux séries, procédant l'une suivant les puissances croissantes de y, l'autre suivant celles de z. Ces séries peuvent être obtenues au moyen de la série de Lagrange, généralisée par Laplace; aussi peut-on dire que nos résultats sont contenus dans cette formule, bien qu'on n'ait pas encore, que je sache, fait cette remarque.

Cependant, comme la forme symétrique de l'équation ci-dessus rend les calculs considérablement plus faciles, je préfère donner une démonstration directe des séries cherchées.

En différentiant l'équation donnée par rapport à y et z, on trouve

$$0 = \frac{1}{\varphi(x)} - \left(\frac{y\varphi'(x)}{\varphi(x)^2} + \frac{z\psi'(x)}{\psi(x)^2}\right)\frac{\partial x}{\partial y},$$

$$0 = \frac{1}{\psi(x)} - \left(\frac{y\varphi'(x)}{\varphi(x)^2} + \frac{z\psi'(x)}{\psi(x)^2}\right)\frac{\partial x}{\partial z},$$

et par conséquent

$$\varphi(x)\frac{\partial x}{\partial y} = \psi(x)\frac{\partial x}{\partial z}. \tag{8}$$

Si nous avons de plus deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ développables en série suivant les puissances croissantes de z, savoir

$$f(x) = A_0 + A_1\frac{z}{1} + A_2\frac{z^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

$$F(x) = B_0 + B_1\frac{z}{1} + B_2\frac{z^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

on obtiendra en différentiant respectivement par rapport à z et y

$$f'(x)\frac{\partial x}{\partial z} = A_1 + A_2 z + \ldots,$$

$$F'(x)\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{dB_0}{dy} + \frac{dB_1}{dy}\frac{z}{1} + \ldots$$

Si la fonction F est déterminée de manière à rendre ces deux séries identiques, on aura

$$A_1 = \frac{dB_0}{dy}, \quad A_2 = \frac{dB_1}{dy}, \quad \ldots,$$

et

$$f'(x)\frac{\partial x}{\partial z} = F'(x)\frac{\partial x}{\partial y},$$

d'où l'on tire, par comparaison avec l'équation (8),

$$f'(x)\varphi(x) = F'(x)\psi(x). \tag{9}$$

Les coefficients A_0 et B_0 peuvent être exprimés par

$$A_0 = f(\beta), \quad B_0 = F(\beta),$$

où β désigne la valeur de x pour $z = 0$. β est donc d'après (7) une racine de l'équation

$$\varphi(\beta) = y. \tag{10}$$

Nous avons donc

$$A_1 = \frac{dB_0}{dy} = F'(\beta)\frac{d\beta}{dy} = \frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)}\frac{df(\beta)}{dy},$$

et nous pouvons déterminer B_1, car ce coefficient dépend de la même manière de F que A_1 de f; c'est pourquoi nous aurons

$$B_1 = \frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)}\frac{dF(\beta)}{dy} = \left(\frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)}\right)^2\frac{df(\beta)}{dy}.$$

Ensuite la valeur de A_2 se déduira de celle de B_1, car A_2 est la dérivée de B_1 par rapport à y. En continuant de cette manière, on trouvera facilement les termes successifs de la série $f(x)$ et l'on obtiendra

$$f(x) = f(\beta) + \frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)} \frac{df(\beta)}{dy} \cdot \frac{z}{1} \cdots \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left[\left(\frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)} \right)^n \frac{df(\beta)}{dy} \right] \frac{z^n}{n!} \cdots \quad (11)$$

Comme on peut, dans l'équation proposée, permuter en même temps y et z, φ et ψ, on déduira de la dernière équation, si γ est une racine de l'équation

$$\varphi(\gamma) = z, \qquad (10')$$

en effectuant la permutation indiquée,

$$f(x) = f(\gamma) + \frac{\psi(\gamma)}{\varphi(\gamma)} \frac{df(\gamma)}{dz} \frac{y}{1} + \cdots + \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\left(\frac{\psi(\gamma)}{\varphi(\gamma)} \right)^n \frac{df(\gamma)}{dz} \right] \frac{y^n}{n!} \cdots \quad (11')$$

Si nous considérons l'équation algébrique (3), nous reconnaîtrons qu'elle peut, de trois manières différentes, être rapportée au type (7), car on peut isoler chacun de ses trois termes à gauche du signe d'égalité, puis diviser l'équation par ce membre.

On reconnaît pourtant que c'est seulement en donnant à l'équation la forme

$$1 = \frac{1}{x^{q-1}} - \frac{a}{x^q},$$

que nous obtiendrons toutes les solutions, à l'exception d'une seule, donnée par l'équation (5).

Nous devons donc poser

$$\varphi(x) = x^{q-1}, \quad \psi(x) = x^q, \quad y = 1, \quad z = -a,$$

et d'après (10) et (10')

$$\beta = y^{\frac{1}{q-1}} \quad \text{et} \quad \gamma = z^{\frac{1}{q}}.$$

Les deux séries de x^p deviendront donc d'après (11) et (11')

$$x^p = y^{\frac{p}{q-1}} + y^{\frac{-1}{q-1}} \frac{d\left(y^{\frac{p}{q-1}}\right)}{dy} \frac{(-a)}{1} + \ldots + \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left[y^{-\frac{n}{q-1}} \frac{d\left(y^{\frac{p}{q-1}}\right)}{dy} \right] \frac{(-a)^n}{n!} + \ldots,$$

où l'on doit poser $y = 1$ après avoir exécuté la différentiation, et

$$x^p = z^{\frac{p}{q}} + z^{\frac{1}{q}} \frac{d\left(z^{\frac{p}{q}}\right)}{dz} \frac{1}{1} + \ldots + \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[z^{\frac{n}{q}} \frac{d\left(z^{\frac{p}{q}}\right)}{dz} \right] \frac{1}{n!} + \ldots,$$

où l'on pose $z = -a$.

Si l'on conserve la notation β pour la racine $(q-1)^{\text{ième}}$ de l'unité et si l'on pose pour abréger

$$\frac{nq-p}{q-1} = r_n, \quad \frac{n+p}{q} = s_n,$$

la première série donnera

$$\left(\frac{x}{\beta}\right)^p = 1 + r_0 \frac{a}{\beta} + \ldots + r_0 \frac{(r_n-1)(r_n-2)\ldots(r_n-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \left(\frac{a}{\beta}\right)^n + \ldots, \quad (13)$$

tandis que l'autre donnera

$$x^p = (-a)^{s_0} + s_0(-a)^{s_1-1} + \ldots + s_0 \frac{(s_n-1)(s_n-2)\ldots(s_n-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} (-a)^{s_n-n} \ldots + \quad (14)$$

Pour obtenir les conditions de convergence de ces deux séries, le mieux est de comparer le $n^{\text{ième}}$ terme avec le $(n+q-1)^{\text{ième}}$ de la première et le $(n+q)^{\text{ième}}$ de la seconde: de cette manière, on trouvera, comme à l'ordinaire, que la série (13) est convergente sous les mêmes conditions que (5), c'est-à-dire si l'on a, abstraction faite du signe,

$$a < (q-1)\, q^{\frac{q}{1-q}},$$

tandis que la série (14) est précisément convergente quand cesse la convergence des autres séries, savoir quaud

$$a > (q-1)\, q^{\frac{q}{1-q}}.$$

Les séries (5) et (13) se suppléent, car la dernière donne les $(q-1)$ valeurs de x^p qui ne sont pas contenues dans (5), si l'on fait prendre à β les diverses valeurs de la racine $(q-1)^{\text{ième}}$ de l'unité. Au contraire, aussitôt que a dépasse la limite indiquée ci-dessus, on ne peut se servir que de la série (14) et elle donne encore la solution complète, car $(-a)$ est élevé à des puissances dont les exposants sont des nombres fractionnaires de dénominateur q: on aura donc q solutions différentes avec les q valeurs que prend $(-a)^{\frac{1}{q}}$.

Si a est un nombre réel, on reconnaît, si l'on peut se servir des premières séries, a ne dépassant pas la limite indiquée ci-dessus, que l'équation aura deux ou trois racines réelles selon que son degré est pair ou impair, β ayant toujours une ou deux valeurs réelles et la série (5) donnant toujours une valeur réelle. Si, au contraire, a est positif et dépasse la limite, on n'aura d'après (14) aucune racine réelle, si le degré de l'équation est pair; on en aura une si ce degré est impair. Cette disparition de deux racines réelles fait soupçonner que l'équation a des racines égales pour la valeur limite de a,

$$a = (q-1)\, q^{\frac{q}{1-q}},$$

ce qui peut servir à la résolution de l'équation dans ce cas limite. Or on doit avoir, dans le cas des racines égales,

$$q x^{q-1} - 1 = a \quad \text{et par suite} \quad x = q^{\frac{1}{1-q}},$$

valeur qui est précisement racine de l'équation proposée, quand a prend la valeur en question.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer qu'on peut dans la série (13) réunir dans une somme tous les termes qui contiennent comme facteur commun la même puissance de $\beta = 1^{\frac{1}{q-1}}$, car ce facteur se répète pour chaque $(q-1)^{\text{ième}}$ terme, et chaque somme prise séparément peut être considérée comme la racine $(q-1)^{\text{ième}}$ d'un nombre réel. Dans la série (14), les termes qui correspondent à une valeur entière de s_n s'évanouiront, et, si elle est ordonnée d'une manière analogue, cette série contiendra $(q-1)$ sommes dont chacune, prise séparément, peut être considérée comme la racine $q^{\text{ième}}$ d'un nombre réel.

Si l'on veut exprimer la série (14) au moyen des fonctions Γ, on peut le faire de la manière suivante. Le terme général du développement contient le produit

$$(s_n-1)(s_n-2)\ldots(s_n-m)\ldots(s_n-n+1),$$

dont le premier facteur est toujour positif, le dernier négatif pour des valeurs suffisamment grandes de n, de manière qu'on peut toujours trouver un nombre entier m pour lequel s_n-m est compris entre 0 et 1. Les $n-m-1$ facteurs suivants, qui par conséquent sont négatifs, peuvent, si l'on change leurs signes, être comme les précédents exprimés par les fonctions Γ, et le produit peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\Gamma(s_n)\,\Gamma(n-s_n)}{\Gamma(s_n-m)\,\Gamma(1-s_n+m)}(-1)^{n-m-1}.$$

Le dénominateur peut être transformé au moyen de la formule

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi},$$

et, comme on le voit facilement, la série (14) prendra la forme

$$x^p = \sum_{s_0}' \frac{\sin s_n \pi}{\pi} \frac{\Gamma(s_n)\,\Gamma(n-s_n)}{\Gamma(n+1)} (-1)^{s_n-1} a^{s_n-n}. \quad (15)$$

Dans cette formule m n'entre pas et elle est valable pour toutes les valeurs que prend n, de 0 jusqu'à ∞, si l'on a égard à la remarque faite ci-dessus relativement à la définition de la fonction Γ pour un argument négatif.

Si l'on pose

$$n = mq + \mu,$$

m et μ étant des nombres entiers, on aura $s_n = m + s_\mu$ et l'on obtiendra la somme de tous les termes en faisant prendre à μ toutes les valeurs de 0 à $q-1$ et à m toutes les valeurs de 0 à ∞. Si l'on différentie par rapport à a, la série prendra la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{da} x^p &= \sum_{\mu=0}^{\mu=q-1} {}_{s_0}' \frac{\sin s_\mu \pi}{\pi} (-1)^{s_\mu} a^{s_\mu-\mu-1} R_\mu, \\ R_\mu &= \sum' \frac{\Gamma(m+s_\mu)\,\Gamma(m(q-1)-s_\mu+\mu+1)}{\Gamma(mq+\mu+1)} a^{-m(q-1)} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

La première somme ne contient que $(q-1)$ termes; car, d'après la remarque faite ci-dessus, le terme pour lequel s_μ est un nombre entier s'évanouit. On a ici cherché une expression de la dérivée de x^p par rapport à a, parce que cette série peut, comme nous le verrons, s'exprimer plus facilement par des intégrales définies. Du reste, on voit facilement qu'on n'a pas besoin d'intégrer pour obtenir x^p: car, en différentiant l'équation proposée, on trouve

$$(qx^{q-1}-1)\frac{dx}{da}+1=0,$$

équation qui, combinée avec la proposée, donne

$$\frac{dx}{da}=\frac{x}{aq-x(q-1)},$$

d'où l'on peut tirer x au moyen de $\frac{dx}{da}$.

Les séries trouvées ici peuvent toutes être facilement sommées au moyen d'intégrales définies.

Pour sommer la série R_μ dans la formule (16), on peut, par exemple, se servir de l'intégrale eulérienne

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

par où l'on obtient immédiatement

$$R_\mu=\Sigma\int_0^1 u^{m+s\mu-1}(1-u)^{m(q-1)-s\mu+\mu}du\cdot a^{-m(q-1)},$$

ou, en effectuant la sommation,

$$R_\mu=a^{q-1}\int_0^1\frac{u^{s\mu-1}(1-u)^{\mu-s\mu}}{a^{q-1}-u(1-u)^{q-1}}du.$$

Si l'on pose ici

$$u=\frac{z-a}{z},$$

on obtiendra

$$R_\mu=a^{\mu+1-s\mu}\int_a^\infty\frac{z^{q-\mu-1}(z-a)^{s\mu-1}}{z^q-z+a}dz,$$

où z croît numériquement de telle sorte que la limite supérieure de l'intégrale est $+\infty$ si a est positif et $-\infty$ si a est négatif. Par cette transformation on obtiendra

l'intégrale d'une fraction dont la décomposition exige la solution de l'équation

$$z^q - z + a = 0,$$

ce qui est l'équation proposée. Autant que je sache, les différentes solutions qu'on a trouvées jusqu'ici des équations algébriques au moyen d'intégrales définies peuvent être rapportées à ce type. Mais une telle solution ne peut pas être considérée comme une solution effective, car on ne pourrait pas, par exemple, trouver une solution d'une équation du troisième degré, et ces intégrales définies ne sont d'aucune utilité tant qu'on n'en peut pas déduire un développement en série.

Un type nouveau de solutions peut être obtenu par la sommation de la série (5) au moyen d'une intégrale définie. J'emploierai à cet effet le théorème suivant de Gauss et Legendre:

$$\Gamma(\alpha m) = \Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{m}\right) \ldots \Gamma\left(\alpha + \frac{m-1}{m}\right) m^{\alpha m - \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-m}{2}},$$

et je développerai l'application relative aux équations du troisième et du quatrième degré.

Pour $q = 3$, $p = 1$, la formule (5) donnera

$$x = \sum \frac{\Gamma(3n+1)}{\Gamma(2n+2)\,\Gamma(n+1)} a^{2n+1},$$

où l'on pose, d'après le théorème cité,

$$\Gamma(3n+1) = \frac{1}{2\pi}\,\Gamma(n+\tfrac{1}{3})\,\Gamma(n+\tfrac{2}{3})\,\Gamma(n+1)\,3^{3n+\frac{1}{2}}.$$

Après avoir différentié par rapport à a, on aura

$$\frac{dx}{da} = \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\Gamma(n+\frac{1}{3})\,\Gamma(n+\frac{2}{3})}{\Gamma(2n+1)}\, 3^{3n+\frac{1}{2}} a^{2n},$$

et la sommation peut être effectuée comme ci-dessus au moyen de l'intégrale eulérienne.

De cette manière on obtient

$$\frac{dx}{da} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1 \frac{u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{1}{3}}}{1-27a^2u(1-u)}\,du,$$

qui se transformera en

$$\frac{dx}{da} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{z^{-\frac{2}{3}}(z+1)}{(1+z)^2-27a^2z}\,dz$$

par la substitution

$$u = \frac{z}{1+z}.$$

On pourra sans difficulté effectuer les intégrations, en décomposant la fraction et en appliquant la formule

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u}\,du = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1,$$

par où l'on trouvera les expressions algébriques bien connues des racines de l'équation. L'intégrale donnera la solution complète, bien que la série, dont la sommation a fourni l'intégrale considérée, ne corresponde qu'à une seule racine de l'équation.

Pour l'équation du quatrième degré, la formule (5) donnera

$$x = \sum \frac{\Gamma(4n+1)}{\Gamma(3n+2)\,\Gamma(n+1)}\,a^{2n+1},$$

et le théorème de Gauss permettra d'écrire

$$\Gamma(4n+1) = \Gamma(2n+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(2n+1)\,2^{4n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$\Gamma(2n+1) = \Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n+1)\,2^{2n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}.$$

En multipliant ces deux équations, on obtiendra une expression de $\Gamma(4n+1)$ qu'on introduira dans l'expression ci-dessus de x; puis, après avoir différentié l'équation par rapport à a, on aura

$$\frac{dx}{da} = \frac{1}{\pi} \sum \frac{\Gamma(2n+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(3n+1)} 2^{6n} a^{3n}.$$

Comme ci-dessus, la sommation peut être exécutée au moyen d'une intégrale définie et l'on obtiendra

$$\frac{dx}{da} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}}{1-64a^3u^2(1-u)} du,$$

où l'intégration dépend de la résolution d'une équation du troisième degré et peut être exécutée comme ci-dessus.

Tandis qu'on peut, de cette manière, résoudre effectivement les équations du troisième et du quatrième degré au moyen d'intégrales définies, le procédé échoue, au contraire, pour les équations de degré supérieur, à raison d'intégrations qui ne peuvent pas être exécutées, ainsi qu'on pouvait du reste s'y attendre.

CONTRIBUTION

A LA THÉORIE DES NOMBRES.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES NOMBRES.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK, 1871, P. 97—114.

Si l'on cherche à résoudre le problème de trouver le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$m^2 + cn^2 = N, \tag{1}$$

où m et n désignent des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs qui satisfont à l'équation, c et N étant des entiers positifs, il arrive qu'on peut parfois trouver, pour certaines valeurs singulières de c, une loi simple mettant en évidence la dépendance qui rattache le nombre en question aux facteurs de N. Ici et dans ce qui suit, par ces mots „le nombre des solutions", nous entendons, à moins qu'une autre signification ne leur soit expressement donnée, le nombre total des valeurs, positives négatives et nulles, que peuvent prendre m et n dans l'équation (1).

Si nous considérons, par exemple, l'équation

$$m^2 + n^2 = N,$$

et si nous posons successivement

$$\begin{aligned} m &= 0, \\ n &= \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ m &= \pm 1, \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{aligned}$$

lés différentes valeurs que N prendra dans ces conditions seront énumérées dans le tableau suivant

$$1,\ 2,\ 4,\ 5_2,\ 8,\ 9,\ 10_2,\ 13_2,\ 16,\ 17_2,\ 18,\ 20_2,\ \ldots,$$

où les nombres qui n'ont pas d'indice correspondent aux valeurs de N, pour lesquelles le nombre de solutions est 4; ce nombre étant le double, c'est-à-dire égal à 8, pour les nombres qui ont l'indice 2.

On peut, à titre d'essai, chercher à former la même série de la manière suivante. On commence par écrire la série des nombres entiers:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ldots$$

Puis on soustrait 3, qui est le premier nombre qui ne se trouve pas dans la série ci-dessus, et tous les multiples de 3, par conséquent

$$-3,\ -6,\ -9,\ -12,\ -15,\ -18,\ \ldots,$$

nombres qui sont affectés du signe négatif pour indiquer qu'ils doivent être soustraits.

Puis nous formons les séries

$$\begin{array}{ccccccccc} 5, & & 10, & & 15, & & 20, & & \ldots, \\ & -7, & & -14, & & & \ldots & & \end{array}$$

et ainsi de suite, de manière que chaque série successive commence par le nombre impair suivant, changé de signe, et soit continuée par les multiples du premier nombre.

En additionnant les nombres correspondants de ces séries, on obtiendra la série

$$1,\ 2,\ 4,\ 5_2,\ 8,\ 9,\ 10_2,\ 13_2,\ 16,\ 17_2,\ 18,\ 20_2,\ \ldots$$

où l'indice 2 signifie que le nombre correspondant se

trouve deux fois dans les séries en question. Nous retrouverons ainsi, au moins pour les nombres considérés, la première série; et, en continuant de la même manière, on obtiendrait facilement une plus grande vraisemblance de la concordance absolue des deux séries. Si cette concordance existe réellement, ce qu'on ne peut démontrer en toute rigueur par cette méthode empirique, nous pourrons facilement trouver la loi du nombre des solutions, parce que les dernières séries sont formées d'après une loi simple. Le terme général de la première série peut être désigné par n, celui de la troisième par $5n$, celui de la cinquième par $9n$ etc., par conséquent en général par $(4m+1)n$, tandis que le terme général des séries à termes négatifs devient $(4m+3)n$, où m peut prendre toutes les valeurs entières à partir de zéro jusqu'à l'infini, et n de 1 jusqu'à l'infini. Un nombre N se trouvera par conséquent autant de fois dans la série finale qu'il y a d'unités dans le nombre des diviseurs de N de la forme $4m+1$, diminué du nombre de ceux qui ont la forme $4m+3$. Soit ρ_N le nombre des solutions de l'équation $m^2+n^2=N$, et soient a_N et b_N les nombres des diviseurs de N de la forme $4m+1$ et $4m+3$; ρ_N est déterminé par

$$\rho_N = 4(a_N - b_N).$$

On peut, en fait, par ce procédé complètement empirique, obtenir une solution exacte de la plupart des problèmes qui seront résolus dans ce qui suit; mais il va sans dire que de telles solutions ne sont pas satisfaisantes au point de vue mathématique, parce qu'elles se présentent comme tout à fait fortuites et manquent de la rigueur qu'on est accoutumé à demander aux

résultats mathématiques. Cette méthode d'essai n'est pourtant pas sans portée; c'est pourquoi je ne l'ai pas négligée, parce qu'elle peut, par l'orientation des résultats qu'on cherche, indiquer la marche qu'il faut suivre dans les calculs.

Si l'on cherche à démontrer toutes les propositions qu'on peut trouver par la méthode d'essai indiquée ci-dessus, on pourra, ou bien suivre la méthode plus synthétique dont on se sert d'ordinaire dans la théorie des nombres, ou bien chercher à obtenir la solution par une voie purement analytique; c'est cette dernière que je préférerai ici.* La méthode analytique consiste dans la transformation de la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+cn^2}, \quad (q<1)$$

en une série d'une autre forme. Puis, en comparant les termes des deux séries qui ont le même exposant N, on détermine le nombre de fois qu'on rencontre cet exposant et par là le nombre des solutions de l'équation $m^2+cn^2 = N$.

C'est de cette manière que Jacobi (Journal de Crelle, tome 12) a résolu le problème dans le cas de $c = 1$, en transformant la série au moyen de la théorie des fonctions elliptiques. Dans sa „Théorie des nombres" (3ième éd., p. 216), Legendre, en établissant que tout nombre positif est une somme de quatre carrés (ou

* Dans le dernier fascc. de ce journal, que j'ai reçu après avoir terminé la rédaction de ce mémoire, M. J. Petersen a traité le même problème par la première méthode. On aura donc l'occasion de comparer les deux méthodes.

moins) appelle l'attention sur ce fait que ce théoréme peut être démontré au moyen des séries de la théorie des fonctions elliptiques, et il ajoute que la démonstration de l'identité des séries, et par suite du théorème, doit pouvoir être faite au moyen de calculs purement analytiques, par où l'on obtiendrait „la démonstration la plus simple qu'il soit possible“ de donner du théorème en question.

C'est dans cette conviction que j'ai essayé de faire ressortir *une solution immédiate, analytique et plus générale*, de cette sorte de problèmes, de manière à éviter le détour difficile des fonctions elliptiques, qui, de plus, ne peuvent être employées que dans le cas singulier mentionné plus haut. De plus, j'indiquerai une application des résultats trouvés à *la sommation de quelques séries*, problème qui a été l'origine de ces recherches.

Nous considérerons en premier lieu la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} x^n = f(x), \tag{2}$$

où n peut prendre toutes les valeurs positives, négatives et nulles, et, après avoir déterminé l'équation fondamentale de la série considérée comme fonction de x, nous transformerons la série au moyen de cette équation en un produit d'un nombre infiniment grand de facteurs. La solution de ce problème est, sous une forme peu différente, une question bien connue dans la théorie des fonctions elliptiques; mais comme je ne présuppose ici aucune connaissance de cette théorie, j'indiquerai en détail le calcul.

En supposant que q est plus petit que l'unité, la série est convergente pour une valeur quelconque de x.

Si l'on remplace x par $q^2 x$, on obtiendra

$$f(q^2 x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2+2n} x^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{(n+1)^2-1} x^n,$$

expression dans laquelle $n+1$ peut être remplacé par n. Par conséquent, on aura

$$f(q^2 x) = \frac{1}{qx} f(x). \tag{3}$$

Inversement, si l'on cherchait à déterminer $f(x)$ au moyen de cette équation, on pourrait le faire en exprimant cette fonction par une série procédant suivant les puissances positives et négatives de x et en déterminant les coefficients au moyen de l'équation fondamentale. En procédant de cette manière, on se convaincra que tous les coefficients peuvent être déterminés, à un facteur constant près, qui reste arbitraire. Toute fonction $F(x)$ qui satisfait à l'équation (3) peut donc être exprimée d'une manière générale par

$$\varphi(q) F(x) = f(x), \tag{4}$$

où φ est une fonction arbitraire, dépendant seulement de q.

Or, la fonction

$$F(x) = (1+qx)(1+q^3x)\ldots(1+qx^{-1})(1+q^3x^{-1})\ldots$$

satisfait à l'équation fondamentale; car, en remplaçant x par q^2x, on obtiendra

$$\begin{aligned} F(q^2x) = {} & (1+q^3x)(1+q^5x)\ldots \\ & (1+q^{-1}x^{-1})(1+qx^{-1})(1+q^3x^{-1})\ldots, \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que

$$F(q^2x) = \frac{1+q^{-1}x^{-1}}{1+qx} F(x) = \frac{1}{qx} F(x).$$

Nous aurons, par suite, en nous servant d'une notation abrégée,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} x^n = \varphi(q) \prod_1^\infty (1+q^{2h-1}x)(1+q^{2h-1}x^{-1}), \quad (5)$$

où $\prod_1^\infty$ désigne le produit d'une suite infinie de facteurs obtenus en posant successivement $h = 1, 2, \ldots$ jusqu'à $h = \infty$. A présent, la fonction indéterminée $\varphi(q)$ doit être déterminée par comparaison des valeurs que prennent les deux membres de l'équation (4), quand on y remplace x par des valeurs données. Pour $x = -1$ et $x = \sqrt{-1}$, on obtiendra les deux relations

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 \ldots = \varphi(q) \prod_1^\infty (1-q^{2h-1})^2,$$
$$1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} \ldots = \varphi(q) \prod_1^\infty (1+q^{4h-2}),$$

où la seconde série est déduite de la première par le changement de q en q^4. Nous obtiendrons donc

$$\varphi(q^4) \prod_1^\infty (1-q^{8h-4})^2 = \varphi(q) \prod_1^\infty (1+q^{4h-2}),$$

d'où résulte

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^4)} = \prod_1^\infty \frac{(1-q^{8h-4})^2}{1+q^{4h-2}} = \prod_1^\infty (1-q^{4h-2})(1-q^{8h-4}).$$

Dans la dernière suite de facteurs, q aura successivement tous les exposants 2, 6, 10, ..., 4, 12, 20, ... c'est-à-dire tous les nombres pairs, à l'exception de 8, 16, 24, ...; pour cette raison l'équation peut encore s'écrire

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^4)} = \prod_1^\infty \frac{1-q^{2h}}{1-q^{8h}}.$$

Dans cette équation, on remplace q par q^4, et l'équation

$$\frac{\varphi(q^4)}{\varphi(q^{16})} = \prod_1^\infty \frac{1-q^{8h}}{1-q^{32h}},$$

formée de cette manière, donnera, par multiplication avec la précédente,

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^{16})} = \prod_1^\infty \frac{1-q^{2h}}{1-q^{32h}}.$$

Ici on pourra de nouveau remplacer q par q^{16} et ainsi de suite, et, en remarquant que $q < 1$ et qu'on aura $q^\infty = 0$ et, d'après (5), $\varphi(0) = 1$, on obtiendra finalement

$$\varphi(q) = \prod_1^\infty (1-q^{2h}),$$

par où la fonction φ est déterminée.

Si l'on introduit cette expression dans l'équation (5), et si l'on pose en même temps $x = 1$, le seul cas dont nous nous servirons ici, on aura

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} = \prod_1^\infty (1-q^{2h})(1+q^{2h-1})^2.$$

Cette équation acquiert une forme plus convenable pour notre but si on la multiplie par le facteur

$$1 = \prod_1^\infty \frac{(1-q^{4h-2})(1-q^{4h})}{(1-q^{4h-2})(1-q^{4h})}$$

$$= \prod_1^\infty \frac{(1-q^{2h})}{(1-q^{4h-2})(1-q^{4h})} = \prod_1^\infty \frac{1}{(1-q^{4h-2})(1+q^{2h})},$$

par où l'on obtient finalement

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} = \prod_1^\infty \frac{(1-q^{2h})(1+q^{2h-1})}{(1+q^{2h})(1-q^{2h-1})}. \tag{6}$$

A présent il est facile de former le produit infini qui exprime la somme double

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+cn^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{cn^2},$$

savoir

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+cn^2}$$

$$= \prod_1^\infty \frac{(1-q^{2h})(1+q^{2h-1})\,(1-q^{2hc})(1+q^{(2h-1)c})}{(1+q^{2h})(1-q^{2h-1})\,(1+q^{2hc})(1-q^{(2h-1)c})}. \tag{7}$$

Il reste encore à résoudre le problème de transformer le produit infini en une série de puissances, mais toutefois différente de la série primitive.

J'ai cherché à obtenir cette transformation au moyen de certains produits infinis de facteurs fractionnaires, en décomposant ces fractions d'après les règles ordinaires de la décomposition des fractions rationnelles. Nous considérerons en premier lieu le produit

$$\frac{1}{2-x}\prod_1^\infty \frac{1-q^{2h-1}x+q^{4h-2}}{1-q^{2h}x+q^{4h}} = P(x). \tag{8}$$

Cette fraction donne par sa décomposition une série de la forme suivante

$$P(x) = \frac{A_0}{2-x} + \frac{A_1}{1-q^2x+q^4} + \frac{A_2}{1-q^4x+q^8} + \cdots,$$

où l'on déterminera A_0 en faisant $x = 2$ dans $P(x)(2-x)$, puis A_1 en faisant $x = \frac{1+q^4}{q^2}$ dans $(1-q^2x+q^4)P(x)$,

et ainsi de suite. On trouvera de cette manière

$$A_0 = \prod_1^\infty \left(\frac{1-q^{2h-1}}{1-q^{2h}}\right)^2,$$

$$A_1 = A_0 q(1+q^2),\ A_2 = A_0 q^2(1+q^4),\ A_3 = A_0 q^3(1+q^6),\ \ldots$$

Par conséquent, on aura

$$\frac{P(x)}{A_0} = \frac{1}{2-x} + \frac{q(1+q^2)}{1-q^2x+q^4} + \frac{q^2(1+q^4)}{1-q^4x+q^8} + \ldots \qquad (9)$$

Si l'on pose $x = -2$, on obtiendra

$$\frac{4P(-2)}{A_0} = \prod_1^\infty \left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}} \cdot \frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2,$$

équation dont le second membre est identique avec le second membre de l'équation (7), où l'on fait $c = 1$. Pour ces valeurs de c et x, les équations (7) et (9) donneront

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+n^2} = 1 + 4\left(\frac{q}{1+q^2} + \frac{q^2}{1+q^4} + \ldots\right). \qquad (10)$$

Si l'on se sert du signe de sommation, la dernière équation peut être écrite

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+n^2} = 1 + 4\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}}$$

$$= 1 + 4\sum_1^\infty \left[q^n - q^{3n} + q^{5n} \ldots\right],$$

ou, si l'on se sert d'un nouveau signe de sommation double,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+n^2}$$

$$= 1 + 4\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\left[q^{(4m+1)n} - q^{(4m+3)n}\right]; \qquad (11)$$

dans le second membre m parcourt toutes les valeurs à partir de 0 jusqu'à ∞, et n à partir de 1 jusqu'à ∞.

Nous obtiendrons ainsi le résultat mentionné ci-dessus, savoir, que si l'équation

$$m^2 + n^2 = N \qquad (12)$$

a ρ_N solutions, et si les équations

$$(4m+1)n = N \quad \text{et} \quad (4m+3)n = N$$

ont respectivement a_N et b_N solutions, n et m n'ayant que des valeurs positives (et de plus m la valeur zéro) dans les dernières équations, on aura d'après (11)

$$\rho_N = 4(a_N - b_N),$$

puisque q doit se trouver le même nombre de fois élevé à la même puissance N dans les deux membres de l'équation (11). On reconnaît facilement que a_N et b_N sont les nombres de diviseurs de N des formes $4m+1$ et $4m+3$. Ce résultat peut être énoncé par la proposition suivante:

Si le nombre N contient les facteurs premiers p_1, p_2, ... de la forme $4m+1$ avec les exposants α_1, α_2, ... et s'il ne contient de facteurs de la forme $4m+3$ qu'élevés à des puissances paires, le nombre des solutions de l'équation $m^2+n^2 = N$ est exprimé par

$$\rho_N = 4(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots;$$

mais si N contient un seul facteur premier de la forme $4m+3$, élevé à une puissance impaire, on aura $\rho_N = 0$.

Supposons d'abord que le nombre N ne contient que des facteurs premiers de la forme $4m+1$. Dans ce cas, la proposition résulte immédiatement du théorème trouvé; car le nombre des diviseurs du nombre N est $(a_1+1)(a_2+1)\ldots$, et ils sont tous de la forme $4m+1$. Le nombre des diviseurs de cette forme ne varie pas quand N est multiplié par 2 ou une puissance de 2; mais si on le multiplie par un facteur premier de la forme $4m+3$, on introduit autant de diviseurs de cette forme que de la forme $4m+1$. Par conséquent on aura

$$a_N = b_N \quad \text{et} \quad \rho_N = 0.$$

Si le nombre est de nouveau multiplié par le même facteur premier, on introduira de nouveau a_N facteurs de la forme $(4m+3)^2 = 4m'+1$, et ainsi de suite.

Voici comment la formule (11) peut être employée à la sommation de séries. Soit ρ_N le nombre de solutions de l'équation $m^2+n^2 = N$; on aura

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m^2+n^2) = \sum_{1}^{\infty} \rho_N f(N),$$

où f est une fonction quelconque à laquelle correspond une série convergente. Nous supposons qu'on supprime dans la série double le terme unique correspondant à $m = n = 0$, de sorte que N ne parcourt que les valeurs entières et positives.

On reconnaît facilement ici que $f(1)$, $f(2)$, ..., se trouvent le même nombre de fois dans les deux membres de l'équation, c'est-à-dire multipliés par le même facteur.

Si l'on se sert des notations employées ci-dessus, on aura de même

$$\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} f((4m+1)n) = \sum_{1}^{\infty} a_N f(N),$$

$$\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} f((4m+3)n) = \sum_{1}^{\infty} b_N f(N).$$

Comme $\rho_N = 4(a_N - b_N)$, on déduira de ces trois équations

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m^2+n^2)$$

$$= 4\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\Big[f((4m+1)n) - f((4m+3)n)\Big]. \quad (13$$

Par exemple

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^p}$$

$$= 4\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{(4m+1)^p n^p} - \frac{1}{(4m+3)^p n^p}\right],$$

où, comme nous l'avons dit, on n'a pas tenu compte dans le premier membre du terme où $m = n = 0$, et où l'exposant p est un nombre quelconque pour leque la série est convergente. La dernière équation peut encore s'écrire

$$\frac{1}{4}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^p}$$

$$= \left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}-\ldots\right).$$

La sommation double est ainsi ramenée à deux

sommations simples, qui peuvent être facilement exécutées avec une exactitude aussi grande qu'on veut.

Si p est un nombre entier, on peut encore ici, comme dans ce qui suit, effectuer avec exactitude l'une des sommations.

Nous pourrons de plus nous servir de la fraction $P(x)$ des équations (8) et (9) dans un autre cas. Posons $x = 0$ et nous aurons

$$\frac{2P(0)}{A_0} = \prod_1^\infty \left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2 \frac{1+q^{4h-2}}{1+q^{4h}}.$$

Si l'on remarque que

$$1-q^{2h} = \frac{1-q^{4h}}{1+q^{2h}} \quad \text{et} \quad 1-q^{2h-1} = \frac{1-q^{4h-2}}{1+q^{2h-1}},$$

on reconnaîtra facilement que le produit infini ci-dessus coïncide avec le second membre de l'équation (7), où l'on a fait $c = 2$.

Des équations (7) et (9) on tirera par conséquent, pour $x = 0$ et $c = 2$,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+2n^2} = 1+2\left\{\frac{q(1+q^2)}{1+q^4}+\frac{q^2(1+q^4)}{1+q^8}+\ldots\right\} \quad (14);$$

le second membre pouvant s'écrire sous la forme

$$1+2\sum_1^\infty \frac{q^n(1+q^{2n})}{1+q^{4n}}$$

$$= 1+2\sum_1^\infty \left[q^n-q^{5n}+q^{9n}-\ldots+q^{3n}-q^{7n}+q^{11n}-\ldots\right],$$

on aura

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+2n^2}$$

$$= 1+2\sum_0^\infty\sum_1^\infty \left[q^{(8m+1)n}+q^{(8m+3)n}-q^{(8m+5)n}-q^{(8m+7)n}\right]. \quad (15)$$

De ce résultat nous pouvons déduire le nombre de solutions de l'équation

$$m^2 + 2n^2 = N; \tag{16}$$

car, si l'on pose successivement

$$(8m+1)n = N, \quad (8m+3)n = N,$$
$$(8m+5)n = N, \quad (8m+7)n = N,$$

et si l'on désigne les nombres de solutions de ces équations par a_N, b_N, c_N, d_N, où m et n ne peuvent prendre que des valeurs positives et entières, m à partir de 0 jusqu'à ∞, n à partir de 1 jusqu'à ∞, on aura

$$\rho_N = 2(a_N + b_N - c_N - d_N),$$

parce que N se trouve ce nombre de fois comme exposant dans les deux membres de l'équation (15). Mais, comme a_N, b_N, ..., sont les nombres de diviseurs de N de la forme $(8m+1)$, $(8m+3)$, ..., ils peuvent très facilement être déterminés.

De là on déduit la proposition suivante:

Si le nombre N contient les facteurs premiers p_1, p_2, ..., de la forme $8m+1$ et $8m+3$ avec les exposants α_1, α_2, ..., et si les facteurs premiers de la forme $8m+5$ et $8m+7$ n'y figurent qu'à des puissances paires, le nombre des solutions de l'équation $m^2+2n^2=N$ sera exprimé par

$$\rho_N = 2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ \ldots;$$

mais si un seul facteur premier de la forme $8m+5$ ou $8m+7$ entre dans N à une puissance impaire, on aura $\rho_N = 0$.

Pour parvenir à cette conclusion, nous pouvons nous servir d'un développement analogue à celui que

nous avons exposé relativement à l'équation $m^2+n^2=N$, si l'on remarque seulement que les puissances paires des nombres $8m+5$ et $8m+7$ sont nécessairement de la forme $8m+1$.

Si l'on emploie l'équation (15) à la sommation de séries, on obtiendra

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m^2+2n^2) = 2\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\Big[f((8m+1)n)+f((8m+3)n) - f((8m+5)n)-f((8m+7)n)\Big]. \qquad (17)$$

Ici, comme dans l'équation (13), on n'a pas tenu compte du terme où $m=n=0$ dans le premier membre.

Par exemple

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[m^2+2n^2]^p}$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{(8m+1)^p}+\frac{1}{(8m+3)^p}-\frac{1}{(8m+5)^p}-\frac{1}{(8m+7)^p}\right]$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{5^p}-\frac{1}{7^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\ldots\right].$$

Il n'est pas difficile de trouver des fractions de forme autre que $P(x)$, qui peuvent être employées dans cette sorte de questions. Nous considérerons par exemple

$$\frac{1}{2-x}\prod_{1}^{\infty}\frac{1-q^{2h-1}x+q^{4h-2}}{1-q^{2h}x+q^{4h}}\cdot\frac{1+q^{2h}x+q^{4h}}{1+q^{2h-1}x+q^{4h-2}}=Q(x). \qquad (18)$$

Cette fraction peut être décomposée en une série de fractions

$$Q(x)=\frac{A_0}{2-x}+\frac{A_1}{1+qx+q^2}+\frac{A_2}{1-q^2x+q^4}+\ldots,$$

où nous trouverons, par les règles ordinaires de la décomposition des fractions rationnelles,

$$A_0 = \prod_1^\infty \left[\frac{(1-q^{2h-1})(1+q^{2h})}{(1-q^{2h})(1+q^{2h-1})}\right]^2,$$

$$A_1 = 2qA_0, \quad A_2 = 2q^2A_0, \quad A_3 = 2q^3A_0, \quad \ldots$$

Si l'on fait ici $x = 1$, on obtiendra

$$\frac{Q(1)}{A_0} = \prod_1^\infty \frac{1-q^{2h-1}+q^{4h-2}}{1-q^{2h}+q^{4h}} \cdot \frac{1+q^{2h}+q^{4h}}{1+q^{2h-1}+q^{4h-2}} \left[\frac{(1-q^{2h})(1+q^{2h-1})}{(1-q^{2h-1})(1+q^{2h})}\right]^2,$$

où nous pouvons poser

$$\begin{aligned}
(1-q^{2h-1}+q^{4h-2})(1+q^{2h-1}) &= 1+q^{6h-3},\\
(1+q^{2h}+q^{4h})(1-q^{2h}) &= 1-q^{6h},\\
(1+q^{2h-1}+q^{4h-2})(1-q^{2h-1}) &= 1-q^{6h-3},\\
(1-q^{2h}+q^{4h})(1+q^{2h}) &= 1+q^{6h}.
\end{aligned}$$

Grâce à ces transformations, la série de facteurs ci-dessus devient identique au second membre de (7), où l'on a fait $c = 3$; et nous obtiendrons donc

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+3n^2}\\
&= 1+\frac{2q}{1+q+q^2}+\frac{2q^2}{1-q^2+q^4}+\frac{2q^3}{1+q^3+q^6}+\ldots\\
&= 1+2\left[q\frac{1-q}{1-q^3}+q^2\frac{1+q^2}{1+q^6}+q^3\frac{1-q^3}{1-q^9}+\ldots\right].
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Si l'on se sert des signes de sommation, cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
&1+2\sum_1^\infty\left[q^{2n-1}\frac{1-q^{2n-1}}{1-q^{6n-3}}+q^{2n}\frac{1+q^{2n}}{1+q^{6n}}\right]\\
&= 1+2\sum_0^\infty\sum_1^\infty\Big[q^{(3m+1)(2n-1)}(1-q^{2n-1})\\
&\qquad\qquad +(q^{(6m+1)2n}-q^{(6m+4)2n})(1+q^{2n})\Big].
\end{aligned}$$

Dans cette identité entrent des termes de la forme $q^{(6m+1)2n}$ et $q^{(6m+5)2n}$, qui peuvent être éliminés au moyen des équations

$$\sum_0^\infty \sum_1^\infty q^{(6m+1)2n} = \sum_0^\infty \sum_1^\infty \left[q^{(3m+1)2n} - q^{(6m+4)2n}\right],$$

$$\sum_0^\infty \sum_1^\infty q^{(6m+5)2n} = \sum_0^\infty \sum_1^\infty \left[q^{(3m+2)2n} - q^{(6m+2)2n}\right],$$

dont la validité devient évidente, si l'on développe les deux membres suivant les valeurs croissantes de m. L'expression ci-dessus se réduira alors à

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+3n^2} = 1 + 2 \sum_0^\infty \sum_1^\infty \Big[q^{(3m+1)n} - q^{(3m+2)n} + 2q^{(3m+1)4n} - 2q^{(3m+2)4n}\Big] \qquad (20)$$

En ce qui concerne les solutions de l'équation

$$m^2 + 3n^2 = N, \qquad (21)$$

nous pouvons comme dans les cas précédents, en supposant que les équations

$$(3m+1)n = N, \quad (3m+2)n = N,$$
$$(3m+1)4n = N, \quad (3m+2)4n = N,$$

aient respectivement a_N, b_N, c_N et d_N solutions en nombres positifs et entiers, conclure qu'on aura

$$\rho_N = 2(a_N - b_N) + 4(c_N - d_N).$$

De cette équation on peut déduire un théorème qui doit être considéré comme nouveau dans la théorie de nombres, parce qu'il ne peut pas être déduit immédiatement des théorèmes connus:

Si un nombre N contient les facteurs premiers $p_1, p_2, \ldots$, de la forme $3m+1$ avec les exposants $a_1, a_2, \ldots$ et si les facteurs premiers de la forme $3m+2$ n'y entrent qu'à des puissances paires, le nombre des solutions de l'équation $m^2+3n^2 = N$ est exprimé par

$$\rho_N = 2(a_1+1)(a_2+1)\ldots,$$

si N est un nombre impair, et par

$$\rho_N = 6(a_1+1)(a_2+1)\ldots$$

si N est pair. Si, au contraire, N contient un facteur premier de la forme $3m+2$ à une puissance impaire, on aura $\rho_N = 0$.

Si l'on applique l'équation (20) à la sommation de séries, on obtiendra

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m^2+3n^2) \\ &= 2\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\Big[f((3m+1)n) - f((3m+2)n) \\ &\qquad + 2f((3m+1)4n) - 2f((3m+2)4n)\Big] \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

où l'on n'a pas tenu compte du terme $m = 0$ dans le premier membre.

Par exemple

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+3n^2)^p}$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{(3m+1)^p} - \frac{1}{(3m+2)^p}\right]\left(1+\frac{2}{4^p}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\ldots\right)\left(1+\frac{2}{4^p}\right).$$

Nous examinerons finalement la fraction

$$\frac{1}{2-x}\prod_1^\infty \frac{1+q^{2h}x+q^{4h}}{1+q^{2h-1}x+q^{4h-2}}\cdot\frac{1-q^{4h-2}x+q^{8h-4}}{1-q^{4h}x+q^{8h}}=R(x), \quad (23)$$

qui se décompose en une somme de fractions

$$\frac{A_0}{2-x}+\frac{A_1}{1+qx+q^2}+\frac{A_3}{1+q^3x+q^6}+\ldots+\frac{A_4}{1-q^4x+q^8}$$
$$+\frac{A_8}{1-q^8x+q^{16}}+\ldots,$$

où les coefficients auront les valeurs

$$A_0=\prod_1^\infty\left[\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\cdot\frac{1-q^{4h-2}}{1-q^{4h}}\right]^2,$$

$$A_1=qA_0,\quad A_3=q^3A_0,\quad \ldots,\quad A_4=2q^4A_0,\quad A_8=2q^8A_0,\quad \ldots$$

Si l'on fait ici $x=0$, on trouvera

$$\frac{2R(0)}{A_0}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}q^{m^2+4n^2},$$

par où l'on peut obtenir un développement en série de cette somme double et, par des procédés analogues à ceux des cas précédents, une détermination du nombre des solutions de l'équation

$$m^2+4n^2=N. \quad (24)$$

Ce résultat peut d'ailleurs être obtenu d'une autre manière plus simple, en comparant l'équation (24) ou bien $m^2+(2n)^2=N$ avec l'équation (12), $m^2+n^2=N$. On reconnaît facilement que, si N est ici un nombre impair, m sera dans le dernier cas impair, si n est pair et inversement, et que, par conséquent, le nombre des solutions de (24) est dans ce cas la moitié de celui de

l'équation (12). Si N est pair, mais non pas divisible par 4, m et n seront tous les deux impairs dans l'équation (12), et (24) n'aura pas de solutions. Finalement, si N est pair et divisible par 4, m et n seront tous les deux pairs dans l'équation (12), et (12) et (24) auront les mêmes solutions. Le résultat peut en tous cas être exprimé par la formule:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m^2+4n^2) = 2\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\Big[&f((4m+1)n)\\ -f((4m+3)n) - f((4m+1)2n) &+ f((4m+3)2n)\\ +2f((4m+1)4n) - 2f((4m+3)4n)&\Big]\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

par où l'on obtiendra, par exemple,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+4n^2)^p}$$

$$= \left(2-\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}\right)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{(4m+1)^p}-\frac{1}{(4m+3)^p}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{4^p}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^p}.$$

Nous ferons encore en peu de mots mention de quelques autres cas dans lesquels on peut appliquer les formules développées.

Si dans l'équation (18) on fait $x = -2$ on obtiendra

$$\frac{4Q(-2)}{A_0} = \prod_{1}^{\infty}\left[\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}\cdot\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}\right]^4.$$

Ce produit infini est d'après (6) égal à

$$\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2}\right]^4 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(4)}\, q^{l^2+m^2+n^2+p^2},$$

où le signe de sommation du second membre désigne une sommation quadruple étendue à toutes les valeurs entières des quatres nombres l, m, n, p à partir de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, y compris zéro. Pour cette somme quadruple on obtiendra le développement en série connu de la théorie des fonctions elliptiques et par conséquent la détermination du nombre de solutions de l'équation

$$l^2+m^2+n^2+p^2 = N$$

et la formule de sommation pour $\Sigma^{(4)} f(l^2+m^2+n^2+p^2)$.

De plus, si dans l'équation (23) on pose $x = -2$, on parviendra au cas de l'équation

$$l^2+m^2+2n^2+2p^2 = N.$$

J'ajouterai les résultats suivants, dont on peut se
* NOTE. servir quelquefois en physique mathématique*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m^2+n^2+mn)$$

$$= 6\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\Big[f((3m+1)n) - f((3m+2)n)\Big],*$$

où le terme $n = m = 0$ doit être négligé, et

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(3(m^2+n^2+mn+m+n)+1)$$

$$3\sum_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\Big[f((3m+1)(6n-5)) - f((3m+2)(6n-1))\Big],$$

---

* La démonstration de ce théorème est développée dans un mémoire, que j'ai l'intention de publier dans le journal de Borchardt.

où l'on doit, dans le premier membre, tenir compte de tous les termes.

Si, dans l'équation $m^2 + cn^2 = N$, c est négatif, le cas diffère essentiellement des cas traités ci-dessus. Dans ce cas, le nombre de solutions est en général infini, sauf dans le seul cas où $-c$ est un carré parfait.

Nous considérerons ici le seul cas de $c = -1$ ou

$$m^2 - n^2 = N. \tag{26}$$

La méthode analytique consiste ici encore à transformer la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum q^{m^2-n^2};$$

mais comme l'exposant est égal à N, nombre entier et positif différent de 0, on doit ici effectuer la sommation de manière que $m^2 - n^2$ reste toujours positif. Par suite n ne peut prendre que les valeurs entières, positives et négatives, qui sont numériquement plus petites que m, tandis que m peut recevoir toutes les valeurs entières de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, 0 seul étant excepté.

Par conséquent la série sera

$$2[q + q^4 + 2q^3 + q^9 + 2q^8 + 2q^5 + q^{16} + 2q^{15} + 2q^{12} + 2q^7 + \ldots],$$

où la série entre crochets peut être décomposée de la manière suivante

$$q + 2q^3 + 2q^5 \ldots = q\frac{1+q^2}{1-q^2},$$

$$q^4 + 2q^8 + 2q^{12} \ldots = q^4\frac{1+q^4}{1-q^4},$$

$$q^9 + 2q^{15} + 2q^{21} \ldots = q^9\frac{1+q^6}{1-q^6},$$

et ainsi de suite; nous obtiendrons de cette manière

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum q^{m^2-n^2} = \sum_{1}^{\infty} q^{n^2}\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

Le second membre de cette équation peut être remplacé par les deux sommes

$$\sum_{1}^{\infty} q^{4n^2}\frac{1+q^{4n}}{1-q^{4n}} \quad \text{et} \quad \sum_{1}^{\infty} q^{(2n-1)^2}\frac{1+q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}$$

que nous traiterons séparément.

La première peut être rapportée à la forme générale

$$\sum_{1}^{\infty} q^{n^2}x^{2n-1}\frac{1+q^n x}{1-q^n x} = \varphi(x), \tag{28}$$

expression qui sera identique à la somme ci-dessus, si l'on fait $x = 1$ et si l'on remplace q par q^4.

De la dernière équation ou

$$\varphi(x) = qx\frac{1+qx}{1-qx} + q^4x^3\frac{1+q^2x}{1-q^2x} + q^9x^5\frac{1+q^3x}{1-q^3x} + \ldots$$

on tirera

$$q^2x^2\varphi(qx) = q^4x^3\frac{1+q^2x}{1-q^2x} + q^9x^5\frac{1+q^3x}{1-q^3x} + \ldots,$$

et, par conséquent, l'équation fondamentale

$$\varphi(x) - q^2x^2\varphi(qx) = qx\frac{1+qx}{1-qx}. \tag{29}$$

$\varphi(x)$ est complètement déterminée par cette équation, car le développement en série par lequel $\varphi(x)$ est primitivement définie peut facilement être déduit de cette équation. Par conséquent toute fonction qui satisfait à

l'équation fondamentale sera identique à $\varphi(x)$. Mais il est évident que la série

$$\frac{qx}{1-qx}+\frac{q^2x^2}{1-q^2x}+\frac{q^3x^3}{1-q^3x}+\ldots=\varphi(x),\quad (qx<1)$$

satisfait à cette équation fondamentale, car on aura

$$q^2x^2\varphi q(x)=\frac{q^4x^3}{1-q^2x}+\frac{q^6x^4}{1-q^3x}+\frac{q^8x^5}{1-q^4x}+\ldots,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\varphi(x)-q^2x^2\varphi(qx)&=\frac{qx}{1-qx}+q^2x^2+q^3x^3+q^4x^4+\ldots\\&=qx\frac{1+qx}{1-qx}.\end{aligned}$$

Nous parviendrons de cette manière à l'équation remarquable

$$\sum_1^\infty q^{n^2}x^{2n-1}\frac{1+q^nx}{1-q^nx}=\sum_1^\infty\frac{q^nx^n}{1-q^nx}. \tag{30}$$

Si l'on fait ici $x=1$ et qu'on remplace q par q^4, on obtiendra

$$\sum_1^\infty q^{4n^2}\frac{1+q^{4n}}{1-q^{4n}}=\sum_1^\infty\frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}. \tag{31}$$

La seconde somme qui doit être transformée peut être rapportée à l'expression

$$\sum_1^\infty q^{(2n-1)^2}x^{2n-1}\frac{1+q^{4n-2}x}{1-q^{4n-2}x}=\psi(x), \tag{32}$$

fonction qui, comme on le reconnaît facilement, satisfait à l'équation fondamentale

$$\psi(x)-q^4x^2\psi(q^4x)=qx\frac{1+q^2x}{1-q^2x}. \tag{33}$$

Par là $\psi(x)$ est complètement déterminée. La même équation est vérifiée par la série

$$\frac{qx}{1-q^2x}+\frac{q^3x^2}{1-q^6x}+\frac{q^5x^3}{1-q^{10}x}+\ldots=\psi(x),$$

car cette série donne pour, $q^2x<1$,

$$\begin{aligned}\psi(x)-q^4x^2\psi(q^4x) &= \frac{qx}{1-q^2x}+q^3x^2+q^5x^3+q^7x^4+\ldots\\ &= qx\,\frac{1+q^2x}{1-q^2x}.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\sum_1^\infty q^{(2n-1)^2}x^{2n-1}\frac{1+q^{4n-2}x}{1-q^{4n-2}x}=\sum_1^\infty\frac{q^{2n-1}x^n}{1-q^{4n-2}x};\quad(34)$$

d'où, pour $x=1$,

$$\sum_1^\infty q^{(2n-1)^2}\frac{1+q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}=\sum_1^\infty\frac{q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}}.\quad(35)$$

En additionnant les deux séries (31) et (35), on obtiendra la transformation en question des séries qui entrent dans l'équation (27), savoir

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum q^{m^2-n^2}=\sum_1^\infty\left[\frac{q^{4n}}{1-q^{4n}}+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}}\right],$$

ou bien, en mettant aussi la dernière série sous la forme d'une somme double,

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum q^{m^2-n^2}=\sum_1^\infty\sum_1^\infty\left[q^{4mn}+q^{(2m-1)(2n-1)}\right].\quad(36)$$

On peut conclure de là que la moitié du nombre des solutions de l'équation $m^2-n^2=N$ est égale au

nombre des solutions (m et n positifs) de l'équation

$$4mn = N \text{ ou de l'équation } (2m-1)(2n-1) = N;$$

ces deux équations ne peuvent pas avoir lieu en même temps. Ce résultat peut encore être exprimé ainsi:

Le nombre des solutions de l'équation $m^2 - n^2 = N$ est égal au double du nombre des diviseurs de N ou de $\frac{1}{4}N$, selon que N est impair ou divisible par 4. Si, au contraire, N n'est divisible que par 2, l'équation n'a point de solutions.

En conséquence de (36), on aura de plus

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m^2-n^2)$$

$$= \sum_1^\infty \sum_1^\infty [f(4mn) + f(2m-1)(2n-1)]. \qquad (37)$$

Par exemple,

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum \frac{1}{(m^2-n^2)^p}$$

$$= \frac{1}{4^p}\sum_1^\infty \frac{1}{m^p}\sum_1^\infty \frac{1}{n^p} + \sum_1^\infty \frac{1}{(2m-1)^p}\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^p}$$

$$= \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots\right)^2.$$

Si p est un nombre pair, on peut trouver la valeur exacte de ces deux sommes.

NOTE.

Lorenz n'a jamais publié aucun mémoire sur ce sujet dans le journal de Borchardt. Mais les deux théorèmes qu'il cite peuvent facilement être déduits du dernier théorème démontré pag. 421 sur le nombre des solutions de l'équation $N = m^2 + 3n^2$.

L'équation

$$N = m^2 + n^2 + mn \qquad (a)$$

peut s'écrire

$$4N = (2m + n)^2 + 3n^2, \qquad (b)$$

par où l'on reconnaît immédiatement que toute solution de l'équation en question donne une solution de l'équation

$$4N = m_1^2 + 3n_1^2, \qquad (c)$$

et comme, dans cette équation, m_1 et n_1 sont en même temps pairs ou impairs, toute solution de l'équation (c) fournira une solution de l'équation (a). Le nombre des solutions de (a) est donc égal à celui de (c), ce qui démontre la première proposition de Lorenz.

La seconde peut être démontrée d'une manière analogue. Si l'on a

$$N = 3(m^2 + n^2 + nm + m + n) + 1, \qquad (d)$$

on aura

$$4N = 3(2m + n + 1)^2 + (3n + 1)^2. \qquad (e)$$

Mais N et par conséquent $4N$ doivent être de la forme $3p+1$, et si l'on pose

$$4N = 3m_1^2 + n_1^2, \qquad (f)$$

n_1 sera de la forme $3p \pm 1$; par conséquent, soit n_1 soit $-n_1$ qui tous deux satisfont à l'équation (f), sera de la forme $3p+1$, tandis que m_1 et n_1 seront en même temps pairs ou impairs. Par conséquent, à toute solution de (f) pour laquelle n_1 est de la forme $3p+1$ correspondra une solution de l'équation (e). L'équation (e) a donc un nombre de solutions qui est la moitié de celui de l'équation (f).

Par conséquent, on aura

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(3(m^2+n^2+mn+m+n)+1)$$

$$= 3\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}[f((3m+1)(3n+1)) - f((3m+2)(3n+2))].$$

De plus, on peut négliger toutes les valeurs de $3n+1$ et $3n+2$ qui sont paires; car à toute solution de l'équation

$$N = (3m+1)(3n+1),$$

où $(3n+1)$ est un nombre pair, correspond une solution de l'équation

$$N = (3m_1+2)(3n_1+2),$$

à savoir

$$N = (6m+2)\left(\frac{3n+1}{2}\right),$$

où $(6m+2)$ est pair.

Mais un nombre impair de la forme $3p+1$ peut toujours être écrit sous la forme $6n-5$, et un nombre impair de la forme $3p+2$ sous la forme $6n-1$.

SUR LA COMPENSATION

DES ERREURS D'OBSERVATION.

SUR
LA COMPENSATION DES ERREURS D'OBSERVATION.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK, 1872, P. 1—20.* * NOTE 1.
(Lu dans la séance de l'Académie des sciences, à Copenhague, le 12 janvier 1872.)

I.

Introduction.

Si l'on a plusieurs observations qui dépendent en quelque manière les unes des autres, on peut souvent déterminer les valeurs particulières observées avec une précision plus grande que celle qui ressort des observations immédiates. La condition pour qu'on puisse de cette manière diminuer ou compenser les erreurs commises dans les observations consiste en général en ceci, que les vraies valeurs des quantités observées soient des fonctions d'une ou plusieurs variables, dont les valeurs vraies ou probables sont connues pour chaque observation.

Si ces fonctions diffèrent pour toutes les observations, on doit, au moins, quand une compensation est possible, connaître leurs formes, et le nombre des constantes inconnues dont elles dépendent doit être plus petit que celui des observations. Au contraire, si les fonctions elles-mêmes sont complètement inconnues, ce qui est souvent le cas en réalité, il faut qu'on sache que les

valeurs vraies de plusieurs quantités observées peuvent être exprimées par la même fonction.

Les valeurs observées, qui, du reste, au lieu d'être immédiatement observées, peuvent être le résultat d'une ou plusieurs observations, combinées avec des quantités indépendantes des observations, étant désignées par

$$O_1, \quad O_2, \quad O_3, \quad \ldots, \quad O_n,$$

les valeurs vraies correspondantes seront représentées par

$$O'_1, \quad O'_2, \quad O'_3, \quad \ldots \quad O'_n.$$

Si ces dernières quantités sont des fonctions d'une ou plusieurs variables, on pourra, au moins approximativement, exprimer ces quantités comme fonctions linéaires de constantes inconnues ou éléments, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ ..., dont le nombre est e, de manière qu'on peut approximativement ou exactement écrire

$$\left.\begin{array}{l} O'_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{A}' + \mathfrak{b}_1\mathfrak{B}' + \mathfrak{c}_1\mathfrak{C}' \ldots \\ O'_2 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{A}' + \mathfrak{b}_2\mathfrak{B}' + \mathfrak{c}_2\mathfrak{C}' \ldots \\ O'_3 = \mathfrak{a}_3\mathfrak{A}' + \mathfrak{b}_3\mathfrak{B}' + \mathfrak{c}_3\mathfrak{C}' \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

où maintenant les coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... affectés d'indices sont des fonctions connues ou inconnues des variables connues pour chaque observation.

S'il n'y a, par exemple, qu'une quantité observée, on aura $O'_1 = O'_2 = O'_3 \ldots$, et l'on pourra poser $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3 \ldots = 1$, tandis que les autres termes s'évanouiront, de manière que $\mathfrak{A}'$ devient la seule quantité inconnue dont la valeur probable doit être déterminée par les observations.

S'il n'y a, pour citer un autre exemple très étendu, qu'une variable indépendante t, qui pour les différentes

observations O_1, O_2, O_3 ... a les valeurs t_1, t_2, t_3 ..., $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ ... seront des fonctions de t_1, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ ... des fonctions de t_2 ... Si, de plus, ces fonctions ne sont pas connues, mais si l'on sait que O'_1, O'_2, O'_3 ... sont exprimées respectivement par la même fonction de t_1, t_2, t_3 ..., on pourra essayer d'obtenir des déterminations de O'_1, O'_2, O'_3 ... soit par un développement en série suivant les puissances de t, par où on aura $\mathfrak{a}_1 = 1$, $\mathfrak{b}_1 = t_1$, $\mathfrak{c}_1 = t_1^2$, ... et ainsi de suite, soit par un développement suivani les puissances d'une fonction de t appropriée aux circonstances données. Parfois un développement suivant des fonctions périodiques peut être avantageux.

Il est un cas où les coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... peuvent être choisis arbitrairement; c'est celui où l'on suppose que le nombre des éléments des équations (1) est égal au nombre n des observations. Mais, dans ce cas, on ne pourrait évidemment obtenir aucune compensation au moyen de ces équations, et elles ne fourniraient aucune relation entre les observations.

Le dernier exemple indique déjà une proposition qui résultera avec plus de précision des recherches suivantes, à savoir que *les valeurs* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... *qui satisfont exactement aux équations* (1), et que nous dénommerons *les vraies valeurs, ne sont pas nécessairement identiques à celles qui donnent la compensation la plus avantageuse.* Le seul cas d'exception est celui où il n'y a qu'un élément.

On a toujours jusqu'ici, en exécutant une compensation au moyen de la méthode des moindres carrés, considéré les valeurs vraies des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... comme des quantités données, dont les valeurs devraient

nécessairement passer sans changement des expressions vraies des observations aux valeurs compensées. On a ainsi négligé l'existence possible d'autres valeurs de ces coefficients qui pourraient amener une compensation plus avantageuse, et l'on a écarté le cas où il serait, par exemple, préférable de supprimer l'une d'elles que de la conserver. Les conditions sous lesquelles une telle omission doit être considérée comme plus avantageuse seront précisément indiquées dans ce qui suivra.

Mais si, même dans le cas où l'on connaît les valeurs vraies des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., la question n'est pas tranchée, de savoir s'il n'y a pas d'autres valeurs plus favorables pour la compensation, il y a d'autant plus lieu de poser cette question dans le cas où l'on ne connaît pas les valeurs de ces coefficients, mais où ils ne peuvent être exprimés qu'approximativement, par exemple, par un développement en série. Le problème à résoudre sera donc de trouver combien de termes de la série et lesquels on doit conserver, puis de décider, si l'on a essayé de se servir de différents développements, lequel d'entre eux donne la compensation la plus avantageuse.

Nous ne pouvons donc dans aucun cas, sauf dans le cas d'un élément unique, considérer les coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., qui seront employés par la compensation, comme des données. Mais, d'autre part, il ne peut être question de déterminer au moyen *des quantités observées* les fonctions des variables indépendantes qui donneraient absolument la compensation la plus favorable. Le problème doit être limité de manière à indiquer les conditions générales de la compensation la plus favorable sous une forme telle qu'il soit toujours possible de

choisir, parmi plusieurs compensations qui pourraient être employées, celle qui doit être considérée comme la plus favorable.

2.

Transformation des coefficients.

Dans ce qui suit on se servira souvent d'expressions de la forme

$$\mathfrak{a}_r\mathfrak{A}+\mathfrak{b}_r\mathfrak{B}+\mathfrak{c}_r\mathfrak{C}+\mathfrak{d}_r\mathfrak{D}+\ldots,$$

où l'indice r représente l'un quelconque des nombres $1, 2, 3 \ldots n$. Il sera convenable de transformer d'abord ces expression par l'introduction des quantités nouvelles α_1, α_2, β_1, α_3, β_2, $\gamma_1 \ldots$, qui sont déterminées par les équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l}
[p\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\alpha_1+[p\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = 0,\\
[p\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\alpha_2+[p\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\beta_1+[p\mathfrak{a}\mathfrak{c}] = 0,\\
[p\mathfrak{b}\mathfrak{a}]\alpha_2+[p\mathfrak{b}\mathfrak{b}]\beta_1+[p\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = 0,\\
[p\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\alpha_3+[p\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\beta_2+[p\mathfrak{a}\mathfrak{c}]\gamma_1+[p\mathfrak{a}\mathfrak{d}] = 0,\\
[p\mathfrak{b}\mathfrak{a}]\alpha_3+[p\mathfrak{b}\mathfrak{b}]\beta_2+[p\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\gamma_1+[p\mathfrak{b}\mathfrak{d}] = 0,\\
[p\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\alpha_3+[p\mathfrak{c}\mathfrak{b}]\beta_2+[p\mathfrak{c}\mathfrak{c}]\gamma_1+[p\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

où l'on s'est servi de la notation abrégée ordinaire de la sommation, à savoir $[p\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ au lieu de $p_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1+p_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 \ldots +p_n\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n$ etc. Les quantités p_1, p_2, ..., p_n désigneront dans ce qui suit les poids correspondants aux observations O_1, O_2, ..., O_n.

Puis, si l'on pose

$$\left.\begin{array}{l}
a_r = \mathfrak{a}_r,\\
b_r = \mathfrak{a}_r\alpha_1+\mathfrak{b}_r,\\
c_r = \mathfrak{a}_r\alpha_2+\mathfrak{b}_r\beta_1+\mathfrak{c}_r,\\
d_r = \mathfrak{a}_r\alpha_3+\mathfrak{b}_r\beta_2+\mathfrak{c}_r\gamma_1+\mathfrak{d}_r,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

on aura

$$\left.\begin{array}{l} [paa] = [\mathfrak{paa}], \\ [pbb] = [\mathfrak{pab}]\alpha_1 + [\mathfrak{pbb}], \\ [pcc] = [\mathfrak{pac}]\alpha_2 + [\mathfrak{pbc}]\beta_1 + [\mathfrak{pcc}], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (4)$$

tandis que les équations (2) donneront

$$\left.\begin{array}{lll} [pab] = 0, & [pac] = 0, & [pad] = 0, \quad \dots. \\ & [pbc] = 0, & [pbd] = 0, \quad \dots. \\ & & [pcd] = 0, \quad \dots. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Si nous introduisons de plus, dans l'expression considérée

$$\mathfrak{a}_r\mathfrak{A} + \mathfrak{b}_r\mathfrak{B} + \mathfrak{c}_r\mathfrak{C} + \mathfrak{d}_r\mathfrak{D} + \dots,$$

les constantes nouvelles A, B, C, ..., au moyen des équations

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = A + B\alpha_1 + C\alpha_2 + D\alpha_3 + \dots, \\ \mathfrak{B} = \quad B + C\beta_1 + D\beta_2 + \dots, \\ \mathfrak{C} = \quad C + D\gamma_1 + \dots, \end{array}\right\} \quad (6)$$

l'expression sera transformée en une autre de la même forme et ayant le même nombre de termes, savoir

$$a_rA + b_rB + c_rC + d_rD + \dots \quad (7)$$

Dans cette expression les nouveaux coefficients $a, b, c, \dots$ satisferont donc aux équations (5).

3.

Compensation par des fonctions linéaires des observations.

Les quantités compensées qui correspondent aux quantités observées

$$O_1, \quad O_2, \quad O_3, \quad \dots, \quad O_n$$

seront désignées par

$$O_1+v_1, \quad O_2+v_2, \quad O_3+v_3, \quad \ldots, \quad O_n+v_n.$$

On peut toujours supposer que le calcul de ces valeurs soit exécuté au moyen d'expressions de la forme (7), de manière qu'on peut poser

$$O_r+v_r = a_rA+b_rB+c_rC+\ldots \tag{8}$$

où $r = 1, 2, \ldots, n$. Les coefficients a, b, c, ... sont formés avec $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... de la manière indiquée dans le paragraphe précédent et ils satisferont donc aux équations (5).

Comme les coefficients originaires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... ne doivent pas nécessairement satisfaire exactement aux équations (1), nous pourrons, en introduisant les nouveaux coefficients et les nouvelles constantes A', B', C', ..., écrire

$$O'_r+v'_r = a_rA'+b_rB'+c_rC'+\ldots \tag{9}$$

Tandis qu'on doit de cette manière, si l'on se sert des coefficients choisis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... introduire des corrections (v'_r) dans les valeurs vraies (O'_r) correspondantes aux observations, nous pourrons imaginer une troisième suite de quantités

$$O''_1, \quad O''_2, \quad O''_3, \quad \ldots, \quad O''_n,$$

qui à présent se comporteront comme les valeurs vraies, c'est-à-dire comme des quantités pour lesquelles les corrections calculées s'évanouiront. Nous aurons donc pour cette suite

$$O''_r = a_rA''+b_rB''+c_rC''+\ldots \tag{10}$$

Les constantes A, B, C, ..., des équations (8) doivent en général être considérées comme des fonctions des valeurs observées et des coefficients choisis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...

Il sera pourtant nécessaire de restreindre ici la généralité du problème par la condition que A, B, C, ... *soient des fonctions linéaires des valeurs observées.*

Nous poserons donc

$$\left.\begin{array}{l} A = x_1 O_1 + x_2 O_2 + \ldots + x_n O_n = [xO], \\ B = [yO], \quad C = [zO], \quad \ldots, \end{array}\right\} \quad (11)$$

où x, y, z, ..., affectés d'indices dépendent des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... et par conséquent aussi de a, b, c, ... mais sont indépendants des valeurs observées.

L'équation (8) est ainsi transformée en

$$O_r + v_r = a_r [xO] + b_r [yO] + c_r [zO] \ldots. \quad (12)$$

Si les quantités O''_r sont calculées de la même manière, on aura

$$A'' = [xO''], \quad B'' = [yO''], \quad C'' = [zO''], \quad \ldots; \quad (13)$$

mais les corrections calculées doivent ici s'évanouir, et par conséquent les équations (10) seront exactement vérifiées par ces valeurs des constantes. C'est pourquoi nous pouvons éliminer les quantités O''_r. Car, si l'on multiplie l'équation (10) par x_r, et si l'on additionne les différentes expressions obtenues en posant $r = 1, 2, \ldots n$, on aura

$$[xO''] = [ax] A'' + [bx] B'' + [cx] C'' + \ldots,$$

et par conséquent

$$A'' = [ax] A'' + [bx] B'' + [cx] C'' + \ldots$$

et par analogie

$$B'' = [ay]\,A'' + [by]\,B'' + [cy]\,C'' + \ldots$$
$$C'' = [az]\,A'' + [bz]\,B'' + [cz]\,C'' + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cependant, comme les coefficients A'', B'', C'', ... sont des quantités qui ne peuvent pas être déterminées, les équations formées de cette manière doivent être identiques, et les coefficients x, y, z doivent donc satisfaire aux équations

$$\left.\begin{array}{llll} [ax] = 1, & [ay] = 0, & [az] = 0, & \ldots \\ [bx] = 0, & [by] = 1, & [bz] = 0, & \ldots \\ [cx] = 0, & [cy] = 0, & [cz] = 1, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \quad (14)$$

Le nombre de ces équations est e^2, si e est le nombre des éléments, tandis que le nombre des coefficients x, y, z, ... est en. C'est seulement dans le cas de $e = n$ que les coefficients x, y, z, ... seraient complètement déterminés par les équations (14), et, si l'on employait les valeurs ainsi déterminées, on trouverait toutes les corrections $v_r = 0$.

Si les coefficients x, y, z, ... sont remplacés par les coefficients nouveaux ξ, η, ζ, ... définis par les équations

$$\left.\begin{array}{l} x_r = \dfrac{p_r a_r}{[pa\,a]} + \xi_r, \quad y_r = \dfrac{p_r b_r}{[pb\,b]} + \eta_r, \\ \qquad z_r = \dfrac{p_r c_r}{[pc\,c]} + \zeta_r + \ldots, \end{array}\right\} \quad (15)$$

les équations de condition de ces nouveaux coefficients seront

$$\left.\begin{array}{llll} [a\xi] = 0, & [a\eta] = 0, & [a\zeta] = 0, & \ldots \\ [b\xi] = 0, & [b\eta] = 0, & [b\zeta] = 0, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \quad (16)$$

Les conditions (14) ou (16) doivent donc être remplies pour toute compensation dans laquelle les valeurs compensées des observations doivent être des fonctions linéaires des valeurs observées. Reste à déterminer les conditions de la compensation la plus favorable; mais cette question ne peut être tranchée que par un calcul de probabilités, et les règles qui doivent être employées seront traitées en détail dans le paragraphe suivant.

4.
Calculs de probabilités.

Après qu'on a exécuté une observation, l'erreur qu'on a commise sera une quantité complètement déterminée, savoir la différence des valeurs vraie et observée; mais *avant* l'observation et, par conséquent, avant que cette quantité ait reçu une valeur déterminée, il y a *la possibilité* d'une multitude infinie de valeurs pour l'observation et pour son erreur. Nous partirons de ce point de vue aprioristique, en supposant que le calcul est exécuté avant toute observation et qu'on doit, par suite, tenir compte de toutes les valeurs possibles de l'erreur.

En ce qui concerne les erreurs d'observation elles-mêmes, nous supposerons que la probabilité des erreurs possibles de chaque observation prise séparement est déterminée par la loi exponentielle des erreurs. La validité de cette supposition est, comme on sait, fondée sur ce que l'on peut imaginer que les erreurs sont produites par une multitude d'erreurs partielles indépendantes l'une de l'autre qui, prises chacune séparément, influent sur l'erreur totale. Cela implique une supposition double en ce qui concerne les observations elles-mêmes, à savoir:

1) Que l'erreur commise dans une observation particulière n'influe sur aucune autre observation;

2) Que chaque erreur d'observation peut indifféremment prendre les mêmes valeurs positives et négatives.

Outre les erreurs d'observation, une autre espèce d'erreurs intervient encore dans les valeurs compensées; c'est celle qui provient de la différence entre les coefficients choisis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., et leurs valeurs vraies. Tandis que les erreurs d'observation, que nous désignerons par u, sont déterminées par

$$u_r = O'_r - O_r, \tag{17}$$

l'autre espèce d'erreurs, que nous nommerons *erreurs de formule* et que nous désignerons par u', peut être définie par l'équation

$$u'_r = O''_r - O'_r. \tag{18}$$

Pour ces erreurs on aura de même *avant* le choix des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., une infinité de valeurs possibles; mais nous n'avons aucun moyen de déterminer les lois des erreurs valables ici, et surtout il n'y a aucune raison pour supposer ici la validité de la loi exponentielle, comme nous l'avons fait pour les erreurs d'observation.

Nous pourrons pourtant toujours supposer remplies les deux conditions suivantes: 1) toutes les erreurs de formule sont indépendantes l'une de l'autre; 2) elles peuvent toutes prendre indifféremment les mêmes valeurs positives et négatives. Or les n erreurs de formule ne dépendent que du choix des n coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., et l'on peut toujours supposer que les choix arbitraires, en nombre infini, de ces coefficients varient de manière

à faire qu'une erreur de formule parcoure toute la série de ses valeurs, tandis que les autres ne varient pas et qu'en même temps chacune des erreurs prend aussi souvent les mêmes valeurs positives que négatives. Il va sens dire que les erreurs de formule sont en tout cas indépendantes des erreurs dues aux observations elles-mêmes.

Nous définissons comme à l'ordinaire „*la valeur moyenne*“ d'une fonction des erreurs comme la somme des valeurs que la fonction prend en tous cas possibles, divisée par le nombre de ces cas. Si la même valeur se présente plusieurs fois, il faut la compter autant le fois qu'elle intervient. Comme notation de la moyenne d'une fonction on se servira dans ce qui suit d'un trait horizontal sur le symbole de fonction: ainsi $\bar{u}$ désigne la moyenne de u. Il suit de nos suppositions sur les erreurs que la moyenne d'un produit de deux facteurs dont l'un est une fonction d'erreurs qui n'entrent pas dans l'autre est égale au produit des moyennes des deux facteurs, et que la moyenne d'une puissance impaire d'une erreur est nulle. Si nous remplaçons une fonction U des erreurs inconnues, par V, l'erreur commise sera $U-V$. „L'erreur moyenne“ M de la même supposition sera définie par

$$M^2 = \overline{(U-V)^2}.$$

Plus petite est cette erreur moyenne, plus „avantageuse“ est jugée la détermination. Comme M^2 a sa plus petite valeur pour $V = \bar{U}$, savoir la valeur

$$M^2 = \overline{U^2} - (\bar{U})^2, \tag{19}$$

la plus avantageuse détermination de u_r sera $u_r = \overline{u_r}$

$= 0$, et le carré de son erreur moyenne sera u_r^2. Le „poids“ p de cette détermination ou de la valeur observée O_r est inversement proportionnel au carré de l'erreur moyenne de la détermination, d'où il suit que

$$p_1\overline{u_1}^2 = p_2\overline{u_2}^2 \ldots = p_n\overline{u_n}^2 = m^2, \qquad (20)$$

où m désigne l'erreur moyenne de l'unité arbitraire de poids. Ces relations ne sont valables que pour les erreurs d'observation, mais non pour les erreurs de formule.

Comme nous supposons que les erreurs d'observation sont assujetties à la loi exponentielle des erreurs, nous dirons, conformément au principe d'où la „méthode des moindres carrés“ a tiré son nom, que les valeurs les plus probables des valeurs observées seront celles pour lesquelles la somme

$$[p(O'-O-v)^2] = [p(u-v)^2]^* \qquad * \text{ NOTE 2.}$$

devient un minimum. Dans la méthode ordinairement suivie pour le calcul des valeurs les plus probables, on n'a pas considéré les coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., comme variables, et le problème peut alors, comme on sait, être réduit à chercher le minimum de la somme $[pv^2]$. Mais on reconnaît facilement que cela ne saurait être permis ici, où les coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., sont supposés variables, par cette première raison que, dans le cas où l'on choisirait autant d'éléments que d'observations, toutes les corrections v_r s'évanouiraient et que par conséquent le minimum absolu de $[pv^2]$ serait zéro. Mais à ce minimum ne correspondrait évidemment pas la compensation la plus avantageuse. Comme nous ne connaissons pas la grandeur des erreurs v_r, nous devons

à l'égard de $[p(u-v)^2]$ chercher sa détermination la plus avantageuse, savoir sa valeur moyenne

$$\overline{[p(u-v)^2]},$$

et au minimum de cette quantité correspondra, par suite, la compensation qui doit être considérée comme la plus avantageuse.

5.

La compensation la plus avantageuse.

On a, d'après les équations (10), (11) et (12),

$$\left.\begin{aligned} O_r + v_r &= a_r[xO] + b_r[yO] + c_r[zO] + \ldots, \\ O''_r &= a_r[xO''] + b_r[yO''] + c_r[zO''] + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

et comme $O''_r - O_r = u_r + u'_r$, on obtiendra, par soustraction de ces deux équations,

$$u_r - v_r = -u'_r + a_r[x(u+u')] + b_r[y(u+u')] + \ldots \quad (22)$$

Si nous écrivons

* NOTE 3. $$[p(u-v)^2] = [pu^2] - 2[puv] + [pv^2],^*$$

le dernier de ces trois termes sera déterminé par la première équation (21); au contraire, les deux premiers contiendront les erreurs inconnues. Aussi ne pouvons-nous seulement que déterminer les valeurs les plus avantageuses de ces deux termes.

On a, d'après l'équation (20),

$$[p\overline{u}^2] = nm^2, \quad (23)$$

et, d'après l'équation (22) ci-dessus,

$$\begin{aligned} p_r u_r v_r = p_r u_r(u_r + u'_r) &- p_r a_r u_r[x(u+u')] \\ &- p_r b_r u_r[y(u+u')] \ldots, \end{aligned}$$

par où nous trouverons facilement, au moyen de la règle de la détermination de la valeur moyenne donnée dans le paragraphe précédent,

$$[\overline{puv}] = [\overline{pu^2}] - [\overline{pu^2}ax] - [\overline{pu^2}by] - \ldots$$

Cette expression se réduit en vertu des équations (20) à

$$nm^2 - m^2[ax] - m^2[by] - \ldots;$$

ensuite nous obtiendrons au moyen des équations (14)

$$[\overline{puv}] = nm^2 - em^2. \tag{24}$$

Par conséquent, si nous désignons la valeur moyenne cherchée de $[p(u-v)^2]$ par V, en posant

$$V = [p\overline{u^2}] - 2[p\overline{uv}] + [pv^2],$$

V sera déterminée par

$$V = [pv^2] + (2e - n)m^2. \tag{25}$$

Cela fait ressortir *qu'on doit considérer comme la plus avantageuse la compensation pour laquelle la quantité* $[pv^2] + [2e - n]m^2$ *et par conséquent aussi*

$$[pv^2] + 2em^2$$

a la plus petite valeur pour une suite donnée d'observations.

Pour un nombre invariable e d'éléments, la compensation la plus avantageuse correspondra donc à la valeur minima de $[pv^2]$; c'est pourquoi nous pourrons, les coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... étant donnés, exécuter le calcul comme à l'ordinaire; mais, si l'on compare deux développements qui sont calculés pour des nombres

différents d'éléments, on doit de plus tenir compte du nombre des éléments.

Nous pouvons aussi déterminer la valeur moyenne de $[p(u-v)^2]$ d'une autre manière, en remplaçant la vraie valeur de $[pv^2]$ par la valeur la plus avantageuse de cette somme calculée avant les observations. On a, d'après l'équation (22)

$$\begin{aligned}\overline{(u_r-v_r)^2} = {} & \overline{u_r'^2}(1-2a_rx_r-2b_ry_r\ldots)\\ & +a_r^2[x^2(\overline{u^2}+\overline{u'^2})]+b_r^2[y^2(\overline{u^2}+\overline{u'^2})]\ldots\\ & +2a_rb_r[xy(\overline{u^2}+\overline{u'^2})]+\ldots,\end{aligned}$$

par où l'on obtient

$$\begin{aligned}&[p\overline{(u-v)^2}]\\ &= [p\overline{u'^2}(1-2ax-2by\ldots)]+[paa][x_2(\overline{u^2}+\overline{u'^2})]\\ &\quad +[pbb][y^2(\overline{u^2}+\overline{u'^2})]+\ldots \qquad (26)\end{aligned}$$

Ici l'on introduit les expressions de $x, y, z \ldots$ données par (15), ce qui fait intervenir les coefficients nouveaux $\xi, \eta, \zeta \ldots$ qui doivent satisfaire aux conditions (16).

Des plus, nous emploierons la notation abrégée

* NOTE 4. $$m'^2 = \frac{1}{n-e}\left[p\overline{u'^2}\left(1-\frac{paa}{[paa]}-\frac{pbb}{[pbb]}\ldots\right)\right],^* \qquad (27)$$

où le second membre est toujours positif, à moins qu'il n'y ait pas d'erreurs de formule, auquel cas nous aurons $m' = 0$.

L'équation (26) deviendra donc

$$\begin{aligned}[p\overline{(u-v)^2}] = {} & (n-e)m'^2+em^2+[paa][\xi^2(\overline{u^2}+\overline{u'^2})]\\ & +[pbb][\eta^2(\overline{u^2}+\overline{u'^2})]+\ldots \qquad (28)\end{aligned}$$

Cette expression aura, pour des valeurs données des coefficients $a, b, c, \ldots$ sa valeur minima quand

$$\xi_r = 0, \quad \eta_r = 0, \quad \zeta_r = 0, \quad \ldots \tag{29}$$

et les coefficients x, y, z, ... seront donc, pour la détermination la plus avantageuse de (15) fournis par les formules

$$x_r = \frac{p_r a_r}{[pa\,a]}, \quad y_r = \frac{p_r b_r}{[pb\,b]}, \quad z_r = \frac{p_r c_r}{[pc\,c]}, \quad \ldots \tag{30}$$

Si l'on emploie ces valeurs des coefficients $x, y, z, \ldots$ on tirera des équations (11) et (12)

$$A = \frac{[pa\,O]}{[pa\,a]}, \quad B = \frac{[pb\,O]}{[pb\,b]}, \quad C = \frac{[pc\,O]}{[pc\,c]}, \quad \ldots \tag{31}$$

et

$$[pv^2] = [pO\,O] - \frac{[pa\,O]^2}{[pa\,a]} - \frac{[pb\,O]^2}{[pb\,b]} - \frac{[pc\,O]^2}{[pc\,c]} \ldots \tag{32}$$

Si nous voulons de nouveau introduire dans ces expressions les coefficients primitifs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... au lieu de a, b, c ..., cela peut facilement se faire au moyen des équations (3) et (4). Si nous introduirons en même temps les constantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... au lieu de A, B, C, ..., ce qui pourtant sera superflu d'ordinaire dans le calcul pratique, les résultats prendront la forme sous laquelle ils sont présentés d'habitude dans la théorie des moindres carrés.

Si l'on compare les deux expressions (25) et (28) de la valeur moyenne de $[p(u-v)^2]$, on obtiendra avec les valeurs calculées des coefficients x, y, z, ..., pour la détermination la plus avantageuse,

$$m^2 + m'^2 = \frac{[pv^2]}{n-e}. \tag{33}$$

L'erreur moyenne M de la détermination

$$[pu^2] - 2[puv] = [pu^2] - 2[puv]$$

employée pour la détermination de V dans (25) est, d'après l'équation (19) rapprochée des equations (23) et (24), déterminée par

$$M^2 = ([\overline{pu^2}] - 2[\overline{puv}])^2 - (2e - n)^2 m^2.$$

Le calcul de la valeur moyenne cherchée ici peut être exécuté sans difficulté et le résultat prend une forme simple, si l'on suppose que la loi exponentielle des erreurs est valable ici pour les erreurs des observations, car nous obtiendrons, grâce à ces hypothèses,

$$p_r^2 \overline{u_r^4} = 3m^4$$

et, comme résultat final,

* NOTE 5. $$M^2 = 2nm^4 + 4m^2 m'^2 (n - e).* \qquad (34)$$

Il en résulte

* NOTE 6. $$M \geqq \sqrt{2n} \cdot m^2.*$$

Comme nous avons, de plus, d'après la détermination la plus avantageuse donnée par (33),

$$[pv^2] \geqq (n - e) m^2,$$

on reconnaît que le rapport de l'erreur moyenne M, que nous employons pour la détermination de la compensation la plus avantagense, à la somme $[pv^2]$ converge vers zéro pour un nombre croissant d'observations, si le nombre des éléments e est ou un nombre donné ou dans un rapport donné avec le nombre n des observations.

6.

La compensation la plus avantageuse calculée d'une autre manière.

La condition de la compensation la plus avantageuse trouvée dans ce qui précède ne dépend pas de la loi des erreurs de formule et le résultat ne doit donc pas varier, quelles que soient les lois de ces erreurs, à condition que nos deux suppositions relatives aux erreurs soint réalisées. Pour cette raison il ne sera pas sans intérêt de contrôler le résultat trouvé en exécutant les calculs suivant les principes appliqués dans la méthode des moindres carrés en faisant cette hypothèse, que la loi exponentielle des erreurs soit encore valable pour les erreurs de formule et que les mêmes poids, p_r, qui correspondent aux erreurs des observations, u_r, correspondent encore aux erreurs de formule, u'_r, tandis que les erreurs moyennes de l'unité de poids des deux espèces d'erreurs peuvent différer.

En partant de ces deux suppositions, on pourra dans les équations (9) et (10), savoir

$$O'_r + v'_r = a_r A' + b_r B' + c_r C' + \ldots,$$
$$O''_r = a_r A'' + b_r B'' + c_r C'' + \ldots,$$

traiter les quantités O'_r comme observations ayant les poids p_r et O''_r comme les valeurs vraies correspondantes. Les constantes A', B', C' ... devront donc être déterminées suivant les principes connus des moindres carrés par le nombre correspondant d'„équations normales“,

$$[pav'] = 0, \quad [pbv'] = 0, \quad [pcv'] = 0 \ldots \quad (35)$$

En même temps on trouvera par soustraction des deux équations ci-dessus

$$O_r + v'_r - O''_r = v'_r - u'_r = a_r(A'-A'') + b_r(B'-B'') + \ldots; \quad (36)$$

par suite, au moyen des équations (35) en multipliant par $p_r v'_r$ et en additionnant toutes les équations qui correspondent aux indices $1, 2, 3 \ldots n$, on obtiendra

$$[p v'(u'-v')] = 0. \quad (37)$$

La détermination la plus avantageuse est de plus donnée par l'équation bien connue de la théorie des moindres carrés

$$\frac{[p u'^2]}{n} = \frac{[p v'^2]}{n-e}. \quad (38)$$

Nous pourrons traiter d'une manière analogue les équations

$$O_r + v_r = a_r A + b_r B + c_r C \ldots,$$
$$O''_r = a_r A'' + b_r B'' + c_r C'' \ldots,$$

par où nous obtiendrons

$$[pav] = 0, \quad [pbv] = 0, \quad [pcv] = 0, \ldots \quad (39)$$

et

$$O_r + v_r - O''_r = v_r - u_r - u'_r = a_r(A-A'') + b_r(B-B'') + \ldots \quad (40)$$

Grâce à cette dernière équation, en multipliant par $p_r v_r$ et additionnant les équations qui correspondent aux indices $1, 2 \ldots n$, on trouve

$$[pv(v-u-u')] = 0; \quad (41)$$

de même en multipliant par $p_r v'_r$ on trouvera d'après (35)

$$[pv'(v-u-u')] = 0, \quad (42)$$

tandis que des équations (36) et (39) on tirera d'une manière analogue

$$[pv(u'-v')] = 0. \quad (43)$$

De plus on a l'équation correspondante à (38)

$$\frac{[p(u+u')^2]}{n} = \frac{[pv^2]}{n-e}. \tag{44}$$

On peut encore ajouter deux équations que l'on obtient en remarquant que les erreurs d'observation u ne dépendent en aucune manière des erreurs u' et v' dont l'origine est due seulement au choix des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ .... Il s'ensuit que la détermination la plus avantageuse et la plus probable sera donnée par les équations

$$[puu'] = 0, \tag{45}$$

$$[puv'] = 0. \tag{46}$$

Au moyen des relations, les unes exactes, les autres seulement probables, qui ont été établies entre les erreurs — et nous aurons précisement besoin de toutes ces équations — est il possible de déterminer la valeur la plus avantageuse de $[p(u-v)^2]$ exprimée par des quantités connues.

En premier lieu, en additionnant les cinq équations (37), (41), (42), (43) et (46) on trouve

$$[p(v'^2 - v^2 + uv)] = 0, \tag{47}$$

tandis que les équations (44) et (45) donneront

$$\frac{[pu^2] + [pu'^2]}{n} = \frac{[pv^2]}{n-e}. \tag{48}$$

Au moyen de ces deux équations, combinées avec l'équation (38), nous pourrons éliminer $[pu'^2]$ et $[pv'^2]$, par où nous obtiendrons

$$[puv] = \frac{n-e}{n}[pu^2].$$

La valeur la plus avantageuse de $[p(u-v)^2]$ sera donc

$$[pu^2] - 2\frac{n-e}{n}[pu^2] + [pv^2],$$

expression qui se transformera en

$$[pv^2] + (2e-n)m^2,$$

si nous introduisons la notation m, l'erreur moyenne de l'unité de poids, et si nous remplaçons $[pu^2]$ par la valeur la plus avantageuse de cette somme, à savoir nm^2.

Le résultat est donc identique au résultat trouvé dans l'article précédent.

7.

Applications.

La condition pour qu'on puisse obtenir un résultat meilleur par les valeurs compensées que par les valeurs observées est

$$[p(u-v)^2] < [pu^2].$$

Si l'on remplace ces quantités respectivement par leurs valeurs les plus avantageuses, savoir $[pv^2] + (2e-n)m^2$ et nm^2, on obtiendra

$$\frac{[pv^2]}{n-e} < 2m^2, \tag{49}$$

condition qui donc doit être remplie, si l'on veut qu'il y ait avantage probable à faire la compensation avec les coefficients admis.

Si l'on ne connaît pas l'erreur moyenne m de l'unité de poids des observations, mais au contraire les valeurs vraies des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ..., on pourra, en faisant la compensation avec ces coefficients, déterminer la valeur la plus avantageuse de m, au moyen de l'équation

$$m^2 = \frac{[pv^2]}{n-e},$$

équation qui résulte de (33), car nous aurons dans ce cas $m' = 0$.

Au contraire, si l'on ne connaît ni les valeurs vraies des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ni l'erreur moyenne de l'unité de poids, *on ne peut pas savoir, si la compensation donnera un résultat meilleur que les observations immédiates.*

Pourtant, même dans ce cas, la compensation peut être d'une utilité essentielle, à un autre point de vue. Tandis qu'on ne peut, comme nous l'avons supposé, rien savoir de la grandeur de la somme des carrés $[pu^2]$ des erreurs d'observation elles-mêmes, on pourra au contraire déterminer par la compensation *les limites, entre lesquelles est vraisemblablement comprise la somme* $[p(u-v)^2]$ *des carrés des valeurs compensées* et l'on pourra de cette manière juger dans un cas donné, si l'on peut, ou non, se contenter des valeurs compensées.

On aura d'après (33)

$$m^2 = \frac{[pv^2]}{n-e} - m'^2,$$

et si nous introduisons cette valeur de m^2 dans l'expression

$$V = [pv^2] + (2e-n)m^2,$$

nous obtiendrons

$$V = \frac{e}{n-e}[pv^2] - (2e-n)m'^2, \qquad (50)$$

deux expressions qui font voir que V ou la valeur la plus avantageuse de $[p(u-v)^2]$ est comprise entre les limites

$$[pv^2] \quad \text{et} \quad \frac{e}{n-e}[pv^2].$$

Pour $e = \frac{1}{2}n$, ces limites coïncident.

2) *La compensation calculée comme à l'ordinaire par les valeurs vraies des coefficients* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... *est plus avantageuse, qu'aucune autre compensation à un nombre d'éléments égal ou plus grand.* Par conséquent, si l'on n'a qu'un élément, les valeurs vraies des coefficients donneront toujours la compensation la plus avantageuse.

On reconnaît facilement l'exactitude de cette proposition, en posant dans l'une des expressions ci-dessus de V

$$[pv^2] = (n-e)(m^2+m'^2),$$

par où l'on obtient

$$V = em^2+(n-e)m'^2. \tag{51}$$

Si l'on se sert dans la compensation des valeurs vraies des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., on aura $m' = 0$ et par conséquent

$$V = em^2;$$

au contraire si l'on se sert d'autres valeurs et si l'on admet e' éléments, on aura

$$V = e'm^2+(n-e)m'^2,$$

valeur qui est plus grande que la précédente, em^2, si e' est égal ou supérieur à e.

Au contraire, on peut obtenir une compensation plus avantageuse avec un nombre plus petit d'éléments.

D'après (32), nous avons

$$[pv^3]-[pOO] = -\frac{[paO]^2}{[paa]}-\frac{[pbO]^2}{[pbb]}-\ldots-\frac{[plO]^2}{[pll]},$$

en désignant par l le dernier des éléments a, b, c ... tandis que leur nombre est désigné comme dans ce qui précède par e.

Si nous négligeons le dernier terme de cette série, elle sera augmentée de $\frac{[plO]^2}{[pll]}$, et le nombre des éléments diminuera d'une unité. Par conséquent, en négligeant le dernier élément, on augmentera V de

$$\frac{[plO]^2}{[pll]} - 2m^2.$$

Donc, si l'on a

$$\frac{[plO]^2}{[pll]} < 2m^2$$

cet accroissement sera négatif, et l'on peut vraisemblablement avec avantage négliger ce dernier élément. Que les observations puissent en réalité avoir de telles valeurs, c'est ce qui se voit facilement; rien même n'empêche d'imaginer une série observations pour laquelle $[plO] = 0$.

Il va sans dire qu'on peut de même se demander, si l'on ne doit pas négliger deux on plusieurs éléments et remplacer les coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... que l'on conserve par des valeurs autres que celles qui originairement étaient les valeurs vraies.

3) Si l'on ne connaît pas les valeurs vraies des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ..., on doit choisir ces valeurs arbitrairement, de manière pourtant à satisfaire à la connexion donnée entre elles, d'où dépend la compensation (voir section 1).

Ensuite, on calcule successivement les coefficients a, b, c ... (voir section 2), et l'on trouve de cette manière les termes successifs de la série $[pv^2] - [pOO]$ indiquée ci-dessus.

Quand on parvient à un terme numériquement plus petit que $2m^2$, il doit être négligé et de même l'élément correspondant; en général on pourra s'en tenir aux termes calculés avant celui-là.

Si, de plus, m est inconnu, on pourra pourtant en tout cas reconnaître quels termes de la série *on ne doit pas négliger*: ainsi tous les termes qui sont numériquement plus grands que $2m^2$, et par conséquent aussi les termes qui sont plus grands que $2\frac{[pv^2]}{n-e}$ doivent être conservés. On pourra ici déterminer $[pv^2]$ au moyen des termes déjà calculés. En général il ne sera pas de grande conséquence pour la détermination du nombre des éléments, que l'on connaisse m, ou non.

Finalement, si l'on veut comparer plusieurs compensations calculées avec des coefficents différents, on doit en premier lieu déterminer pour chaque compensation en particulier le nombre le plus avantageux d'éléments et puis comparer les valeurs de V obtenues de cette manière par les différentes compensations.

Parfois on peut, en outre, demander s'il est plus avantageux de calculer toute la série des observations avec les mêmes coefficients ou de la subdiviser en plusieurs séries et de calculer chaque partie au moyen de coefficients particuliers, auquel cas on doit remarquer que, les nombres des éléments des séries particulières étant e', e'' ..., le nombre total pour toute la série sera $e'+e''+ \ldots$.

Une telle subdivision d'une série donnée d'observations peut, par exemple, être encore appliquée à des observations de deux ou de plusieurs quantités, dans lesquelles les valeurs observées sont mêlées d'une manière

inconnue, ou à des observations d'une seule quantité, pour lesquelles l'on connaît l'erreur moyenne des erreurs accidentelles, mais où se sont en outre introduites des erreurs constantes pour quelques observations particulières, sans qu'on sache pour lesquelles. Nous ne traiterons pas ces problèmes particuliers de compensation, parce que nous avons indiqué la marche à suivre pour trouver une solution, s'il en existe une, le problème étant en tout cas réduit à la détermination des corrections v de manière à obtenir pour la série totale d'observations la valeur la plus petite possible de

$$[pv^2] + 2em^2.$$

NOTES.

NOTE 1. Ce mémoire contient un supplément à la théorie ordinaire de la compensation des erreurs d'observation. En se mettant au point de vue aprioristique Lorenz soutient que, même dans le cas où l'on connaît les valeurs vraies des éléments, on n'obtiendra pas toujours la compensation la plus avantageuse en se servant de ces valeurs vraies.

La théorie de Lorenz a été combattue par M. le capitaine (à présent général) Zachariae.*

NOTE 2. La condition

$$[p(u-v)^2] = \text{Min.}$$

donnera le même résultat que la théorie ordinaire des moindres carrés, si l'on remplace, comme le fait Lorenz, les quantités inconnues par leurs valeurs moyennes.

NOTE 3. Le texte de Lorenz en ce passage est très peu clair. Lorenz dit que la valeur de $[pv^2]$ est déterminée par l'équation (21) et que, pour cette raison, on ne peut déterminer la valeur la plus avantageuse de

---

* Voir „Tidsskrift for Mathematlk". 1872. Zachariae: Udjevning af Iagttagelsesfejl (deux notes) p. 97—103 et 182—188, et les répliques de Lorenz, dans le même journal, Bidrag til Udjevningsproblemet, 1872, p. 125—135 et Et Gjensvar, 1873, p. 31—32.

$[pu^2] - 2[puv] + [pv^2]$ que par les deux premiers termes. On doit donc en conclure qu'il considère v_r comme une constante et que par conséquent $\overline{[puv]} = 0$. Le résultat ne concorde pas avec celui de Lorenz; mais c'est qu'en effet, ici comme dans la formule (28), il remplace la vraie valeur de v_r par sa valeur la plus avantageuse calculée avant l'observation.

NOTE 4. Je ne peux pas voir pourquoi la quantité désignée par Lorenz par m'^2 doit être supposée positive.

NOTE 5. L'évaluation de l'expression

$$M^2 = \left(\overline{[pu^2] - 2[puv]}\right)^2 - (2e - n)^2 m^4$$

peut se faire de la manière suivante.

On a

$$M^2 = \overline{[pu^2]}^2 + 4\overline{[puv][pu(v-u)]} - (2e-n)^2 m^4;$$

nous allons calculer séparément la valeur de chaque terme.

On a

$$[pu^2] = p_1 u_1^2 + p_2 u_2^2 + \ldots + p_n u_n^2$$

et par conséquent

$$[pu^2]^2 = [p^2 u^4] + 2\Sigma p_r p_s u_r^2 u_s^2,$$

où le dernier groupe comprend $\frac{n(n-1)}{2}$ termes, et comme $\overline{p_r^2 u^4} = 3m^4$, $\overline{p_r u_r^2} = m^2$, on aura

$$\overline{[pu^2]}^2 = n(n+2)m^4.$$

Considérons ensuite le terme

$$\overline{[puv][pu(v-u)]}$$
$$= \overline{[pu(u+u') - a[x(u+u')] - b[y(u+u')] \ldots]}$$
$$\times \overline{[pu(u' - a[x(u+u'] - b[y(u+u')] \ldots]}.$$

Tout terme qui ne contient u' qu'à la première puissance s'évanouira; aussi les termes qui dépendent de u' se trouvent ils dans l'expression

$$\overline{[pu(u'-a[xu']-b[yu']\ldots)]^2}$$
$$= \overline{[p^2u^2(u'^2+a^2[x^2u'^2]+b^2[y^2u'^2]-2axu'^2-2byu'^2\ldots)]}$$
$$= m^2m'^2(n-e).$$

Reste à calculzr la valeur de

$$-\overline{[pu(u-a[xu]-b[yu]\ldots][pu(a[xu]+b[yu]\ldots)]}$$
$$= -\overline{[pu^2][pa\,xu^2+pb\,yu^2\ldots]+[pu(a[xu]+b[yu]\ldots]^2}.$$

Mais on peut remplacer $\overline{p_ru_r^2}$ par m^2, $p_r^2u_r^4$ par $3m^4$; par conséquent, on aura

$$\overline{[pu^2][pa\,xu^2+pb\,yu^2\ldots)]}$$
$$= m^4(n+2)([ax]+[by]+\ldots),$$

et comme $[ax] = [by] = \ldots 1$, il viendra

$$\overline{[pu^2][pa\,xu^2+pb\,yu^2\ldots]} = m^4e(n+2).$$

Finalement on aura

$$\begin{aligned}
&\overline{[pu(a[xu]+b[yu]\ldots]^2}\\
&= \overline{[pu\,a]^2[xu]^2}+\overline{[pu\,b]^2[yu]^2}+\ldots\\
&\quad+2\overline{[pu\,a][pu\,b][xu][yu]}+\ldots\\
&= m^4\Big([a^2p]\left[\frac{x^2}{p}\right]+[b^2p]\left[\frac{y^2}{p}\right]+\ldots\\
&\quad+4\Sigma(a_ra_sx_rx_s+b_rb_sy_ry_s+\ldots)\\
&\quad+2([a^2x^2]+[b^2y^2]+\ldots)\\
&\quad+2\Sigma[pa\,b]\left[\frac{xy}{p}\right]\\
&\quad+4\Sigma[xy\,ba]\\
&\quad+2\Sigma\Sigma a_rb_sx_ry_s+2\Sigma\Sigma a_rb_sx_sy_r\Big)\\
&= m^4\Big(\Sigma[a^2p]\left[\frac{x^2}{p}\right]+2\Sigma[ax]^2+2\Sigma[ay][bx]\\
&\quad+2\Sigma[ax][by]+2\Sigma[pab]\left[\frac{xy}{p}\right]\Big).
\end{aligned}$$

Mais comme $[pab] = [pac] = \ldots = 0$ et, par conséquent, $[ay] = [az] = \ldots = 0$, on verra facilement que toute l'expression se réduit à

$$m^4(3e + e(e-1)).$$

On aura donc

$$\begin{aligned} M^2 &= n(n+2)m^4 + 4m^2m'^2(n-e) - 4m^4e(n+2) \\ &\quad + 4m^4(3e + e(e-1)) - (2e-n)^2m^4 \\ &= 2nm^4 + 4m^2m'^2(n-e). \end{aligned}$$

NOTE **6**. Lorenz a, par méprise, écrit

$$M \leqq \sqrt{2n} \cdot m^2;$$

mais sa conclusion est pourtant juste.

SUR LA RÉDUCTION

DU FACTEUR EULÉRIEN.

SUR LA REDUCTION DU FACTEUR EULÉRIEN.* * NOTE 1.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK 1874, P. 33—39.

Les fonctions transcendantes qui seront traitées ici peuvent être classifiées de la manière suivante. La transcendante monôme du premier ordre est définie par

$$\theta_1 = \int f(\alpha)\, d\alpha,$$

où la limite supérieure de l'intégrale est une fonction algébrique de x et y, tandis que la limite inférieure est une constante. La fonction f est, comme les autres fonctions qui, dans ce qui suit, seront désignées par la même lettre affectée d'indices différents, une fonction algébrique de la variable indépendante, ici α; au contraire, on suppose que θ ne puisse pas être exprimée algébriquement par la variable.

Une fonction transcendante du premier ordre qui est désignée par t_1 est une fonction algébrique de x, y, transcendantes monômes du premier ordre comme θ_1, θ'_1 ... et des fonctions inverses de θ_1, θ'_1 ... η_1, η'_1 ... considérées comme fonctions de α, α_1 ... *Une fonction monôme du second ordre a la forme*

$$\theta_2 = \int f_1(t_1)\, dt_1.$$

La fonction transcendante du second ordre est une fonction algébrique de x, y, θ_1, θ'_1 ... η_1, η'_1 ..., θ_2, θ'_2 ... η_2, η'_2 ..., où les dernières fonctions sont les fonctions

NOTE 2. inverses de θ_2, θ'_2 ...* En continuant de cette manière, la définition des transcendantes monômes et des fonctions transcendantes d'ordre supérieur est immédiatement évidente.

Une équation entre les fonctions transcendantes de ladite espèce écrite sous la forme la plus simple, de manière que le nombre des transcendantes monômes de l'ordre le plus élevé et de leurs fonctions inverses soit réduit à son minimum, doit être identique en particulier par rapport à chaque fonction de ladite espèce; car autrement on pourrait exprimer une d'elles algébriquement par les autres et par les fonctions d'ordre inférieur, de sorte que le nombre des transcendantes de l'ordre le plus élevé ne serait pas réduit à son minimum.

Je suppose maintenant qu'une équation donnée $dy + Pdx = 0$, où P est une fonction algébrique de x et y, a un facteur intégrant qui peut être exprimé par les transcendantes de l'espèce définie ci-dessus; le problème à résoudre sera, de trouver une *forme normale* à laquelle peut être réduit chaque facteur transcendant de ladite espèce. J'ai cherché à résoudre ce problème de cette manière: j'imagine qu'un facteur intégrant F soit donné comme fonction transcendante de l'ordre n, c'est à dire comme fonction algébrique de $\theta_n, \theta'_n, \ldots \eta_n, \eta'_n \ldots$, de fonctions monômes d'ordre inférieur, de leurs fonctions inverses et enfin de x et y. Je cherche alors à réduire ce facteur à un autre, d'ordre inférieur et ainsi de suite. On suppose toujours dans le calcul que le nombre des transcendantes est réduit à son minimum.

Nous chercherons d'abord la réduction de F par rapport à θ_n, que nous désignerons provisoirement, pour abréger, par la seule lettre θ.

L'équation de condition du facteur est

$$\frac{\partial F}{\partial x} + P\frac{\partial F}{\partial y} + F\frac{\partial P}{\partial y} = 0. \qquad (1)$$

Comme F est une fonction algébrique de θ (et des autres variables), nous pourrons considérer F comme racine d'une équation algébrique irréductible

$$a_0 + a_1 F + \ldots + a_n F^n = 0, \qquad (2)$$

où les coefficients sont des fonctions entières et rationnelles de θ (et des autres variables). De la même manière P est racine d'une équation algébrique; mais à une racine particulière de celle-ci ne correspond pas nécessairement une racine quelconque de (2), et il n'est permis que de supposer qu'une seule racine de (2) satisfasse à l'équation différentielle (1).

Soit $Q\theta^s$ la valeur limite vers laquelle tend une racine de l'équation (2), lorsque θ croît à l'infini ou, ce qui revient au même, le premier terme de la série qu'on obtient par le développement de la racine suivant les puissances décroissantes de θ.

Ce terme peut être déterminé de la manière suivante. Dans l'équation (2), F est remplacée par $Q\theta^s$ et l'on sépare dans les coefficients a_0, a_1, ... les termes qui contiennent les puissances les plus élevées de θ, à savoir $c_0\theta^{\mu_0}$, $c_1\theta^{\mu_1}$ ...; nous aurons ainsi provisoirement l'équation suivante pour déterminer Q

$$c_0\theta^{\mu_0} + c_1\theta^{\mu_1+s}Q \ldots c_m\theta^{\mu_m+ms}Q^m = 0. \qquad (3)$$

Pour* trouver les valeurs différentes que peut prendre Q, nous chercherons d'abord l'exposant μ_q pour lequel

$$\frac{\mu_q - \mu_0}{q} \geqq \frac{\mu_p - \mu_0}{p},$$

* NOTE.

où p désigne un indice quelconque plus grand que 0. Puis on peut poser $s = -\frac{\mu_q - \mu_0}{q}$, valeur pour laquelle $\mu_p + ps \overline{\overline{<}} \mu_0$, par où l'on reconnait qu'aucun exposant de θ dans (3) n'est plus grand que μ_0. En negligeant tous les termes dont les exposants sont plus petits que μ_0, θ^{μ_0} sera facteur commun des termes restants et le coefficient de θ^{μ_0} égalé à zéro donnera une équation propre à déterminer Q.

Si q est l'indice le plus grand des termes de cette dernière équation, on cherchera ensuite un exposant μ_r, à indice plus grand, pour lequel

$$\frac{\mu_r - \mu_q}{r - q} \overline{\overline{>}} \frac{\mu_p - \mu_q}{p - q},$$

où p désigne un indice quelconque plus grand que q. Puis on pose $s = -\frac{\mu_r - \mu_q}{r - q}$, par où l'on obtiendra

$$\mu_q + qs \overline{\overline{>}} \mu_p + ps,$$

et par conséquent $\mu_q + qs$ sera à présent la puissance la plus grande de θ qui entre dans (3). En négligeant tous les termes de degré inférieur et en divisant par $\theta^{\mu_q + qs} Q^q$, on obtiendra une équation nouvelle par laquelle d'autres valeurs de Q peuvent être déterminées. En continuant de cette manière, on obtiendra les équations suffisantes pour la détermination de toutes les valeurs de Q correspondant aux m racines de l'équation (2).

Du reste ces équations peuvent aisément être trouvées de la manière suivante. Qu'on représente μ_0, μ_1 ... comme des ordonnées successives rangées d'après leurs indices et que l'on construise un polygone convexe, de

manière à faire coïncider ses sommets avec les extrémités des ordonnées, de telle manière qu'aucune d'elles ne soit en dehors du polygone. A chaque côté du polygone passant par deux ou plusieurs points μ correspondra alors une équation en Q; par exemple, à un côté passant par les points μ_2, μ_4, μ_5 correspondra l'équation

$$c_2 + c_4 Q^2 + c_5 Q^3 = 0.$$

Après avoir trouvé de cette manière la valeur de $Q\theta^s$ correspondante à F dans l'équation (1), nous remplaçons F par cette quantité, et, comme l'équation est identique par rapport à θ, nous égalerons à zéro le coefficient de la plus haute puissance de θ. Comme $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ ne contiennent que des transcendantes d'ordre inférieur, cette puissance est θ^s, et l'on trouvera

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + P\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} Q = 0,$$

par où l'on reconnaît que Q, qui ne contient pas θ, est un facteur intégrant.

De la même manière on peut réduire le facteur par rapport à toutes les transcendantes monômes d'ordre n; et l'on obtiendra finalement un facteur ne contenant que les fonctions inverses des transcendantes monômes d'ordre n.

Si une telle fonction est désignée par η, et si l'on se sert de nouveau de la lettre F pour représenter le facteur intégrant, l'équation de condition sera

$$\frac{\partial F}{\partial x} + P\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{f(\eta)}\frac{\partial F}{\partial \eta}\left[\frac{\partial t_{n-1}}{\partial x} + P\frac{\partial t_{n-1}}{\partial y}\right] + \frac{\partial P}{\partial y} F = 0, \quad (4)$$

où la différentiation par rapport à η est indiquée sé-

parément et où η est la fonction inverse de $\theta = \int f(t_{n-1})dt_{n-1}$, d'où résulte

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_{n-1}} = \frac{1}{f(\eta)}.$$

Dans l'équation ci-dessus nous chercherons le coefficient de la plus haute puissance de η, après avoir déterminé de la manière indiquée ci-dessus le premier terme de $Q\eta^s$ dans le développement de F suivant les puissances décroissantes de η. En même temps on trouvera la quantité $k\eta^\sigma$ où k est une constante, savoir le premier terme du développement correspondant de $\frac{1}{f(\eta)}$. Les termes de l'équation (4) qui entreront en considération seront donc

$$\left.\begin{aligned} \eta^s\Big[\frac{\partial Q}{\partial x} + P\frac{\partial Q}{\partial y} + sk\,Q\eta^{\sigma-1}\Big(\frac{\partial t_{n-1}}{\partial x} + P\frac{\partial t_{n-1}}{\partial y}\Big) \\ + \frac{\partial P}{\partial y}Q\Big] + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Il s'ensuit que Q sera un facteur intégrant, si σ est plus petit que 1, on si s est égal à zéro. Si $\sigma > 1$ et si s diffère de zéro, on aura

$$\frac{\partial t_{n-1}}{\partial x} + P\frac{\partial t_{n-1}}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

par où l'on voit, en différentiant l'équation par rapport à y, que $\frac{\partial t_{n-1}}{\partial y}$ doit être elle-même un facteur intégrant.

Enfin, si $\sigma = 1$, on doit tenir compte de tous les termes de l'équation (5), et l'équation qu'on obtient en égalant le coefficient de η^s à zéro fait voir que $Q\eta^{skt_{n-1}}$ sera un facteur intégrant; car, si l'on remplace F par cette valeur dans l'équation de condition (1), on obtiendra l'équation trouvée.

Après réduction par rapport à toutes les transcendantes inverses d'ordre n, le facteur intégrant peut être mis sous la forme $\varphi_{n-1} e^{\psi_{n-1}}$ ou $e^{\psi_{n-1}+l\varphi_{n-1}}$, où φ_{n-1} et ψ_{n-1} sont des fonctions transcendantes d'ordre $(n-1)$. Néanmoins, en vue des calculs qui suivront, ce facteur sera rapporté à la forme plus générale

$$F = e^{\psi_{n-1}+C_n\theta_n+C'_n\theta'_n+\cdots}, \tag{7}$$

où C_n, C'_n ... sont des constantes.

L'exposant de e, que nous désignerons pour abréger par φ, a pour dérivée par rapport à une variable quelconque une fonction transcendante d'ordre inférieur à n. Dans l'équation de condition de φ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+P\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}=0, \tag{8}$$

les transcendantes monômes et leurs fonctions inverses seront au plus d'ordre $n-1$. Par conséquent, cette équation est identique par rapport à θ_{n-1} et peut donc être différentiée par rapport à cette variable. Comme les coefficients diffiérentiels de θ_{n-1}, de même que P, ne contiennent pas θ_{n-1}, l'équation deviendra après avoir été différentiée* * NOTE 4.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_{n-1}}\right)}{\partial x}+P\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_{n-1}}\right)}{\partial y}=0. \tag{9}$$

Par suite, si $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_{n-1}}$ n'est pas une constante*, $\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_{n-1}}\right)}{\partial y}$ * NOTE 5. sera un facteur intégrant; celui-ci est donc réduit à l'ordre $n-1$. De même on peut faire une réduction analogue, si $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta'_{n-1}}$ n'est pas constant etc.; ce n'est que dans le cas,

où φ a la forme

$$\varphi = \psi_{n-1} + C_{n-1}\theta_{n-1} + C'_{n-1}\theta'_{n-1} + \ldots \tag{10}$$

ψ_{n-1} ne contenant pas θ_{n-1}, θ'_{n-1} ... mais seulement leurs fonctions inverses, qu'on ne peut plus faire aucune réduction ultérieure.

Si l'on différentie l'équation (8) par rapport à η_{n-1}, que nous désignerons pour abréger par la seule lettre η,
* NOTE 6. et si l'on divise par $f(\eta)$, on trouvera*

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{f(\eta)}\right)}{\partial x} + P\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{f(\eta)}\right)}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Par cette équation on peut de nouveau réduire le facteur intégrant à l'ordre $n-1$, à moins que l'on n'ait $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{f(\eta)} = c$, d'où l'on déduira $\varphi = \psi + c\int f(\eta)\,d\eta$, ψ étant indépendant de η. Mais on reconnaît facilement, que la dernière intégrale est d'ordre moindre que η, de manière que φ ne contient pas en réalité η dans ce cas.

Nous pouvons donc conclure, ou bien que la fonction ψ_{n-1} de l'équation (10) ne doit contenir aucune des transcendantes inverses d'ordre $(n-1)$, et φ aura alors la forme

$$\varphi = \psi_{n-2} + C_{n-1}\theta_{n-1} + C'_{n-1}\theta'_{n-1} \ldots, \tag{12}$$

ou bien que la facteur intégrant peut être réduit à l'ordre $(n-1)$. Mais on pourra alors continuer la réduction de la même manière que ci-dessus jusqu'à ce que nous arrivions à la forme de φ indiquée dans (12).

---

* C'est M. le Dr. phil. Jul. Petersen qui a le premier remarqué cette équation.

Mais on reconnaît alors facilement que la réduction peut être continuée jusqu'à ce que nous arrivions finalement à la forme

$$\varphi = \psi + C_1\theta_1 + C'_1\theta'_1 \ldots$$

où ψ est une fonction algébrique de x et y.

Donc, si le facteur Eulérien de l'équation $dy + Pdx = 0$ peut être exprimé par des transcendantes de l'espèce considérée ici, ce facteur peut être réduit à une forme normale déterminée par

$$F = e^{\psi + \int f(\alpha)\,d\alpha + \int f'(\alpha')\,d\alpha' + \ldots}.$$

Les sens des notations employées dans cette équations est mis en évidence par ce qui précède.

NOTES.

NOTE 1. Ce mémoire est un remaniement d'une note „Om den Eulerske Factor“ (sur le facteur Eulérien) insérée dans Math. Tidss., 1873, p. 174—176.

Comme M. le professeur J. Petersen avait averti Lorenz d'une erreur contenue dans ladite note, tandis que le résultat conservait sa validité, Lorenz a écrit le présent mémoire.

NOTE 2. Les fonctions inverses η_n sont définies de la manière suivante.

Soit $\theta_n = \int f(t_{n-1})\,dt_{n-1}$, où t_{n-1} est une fonction transcendante d'ordre $n-1$; alors on aura

$$t_{n-1} = \int f(\eta_n)\,d\eta_n,$$

ou bien

$$\frac{\partial \eta_n}{\partial t_{n-1}} = \frac{1}{f(\eta_n)}.$$

NOTE 3. Lorenz cherche les valeurs de s pour lesquelles deux termes au moins ont des exposants égaux et supérieurs à tous les autres.

Le plus grand exposant doit au moins être égal à μ_0, et l'on cherche à déterminer une valeur de s pour laquelle $\mu_0 = \mu_q + sq$ est supérieur ou au moins égal aux valeurs des autres exposants. On doit donc avoir

$$\mu_0 = \mu_q + sq \geqq \mu_p + sp,$$

où p peut être un nombre quelconque compris entre 0 et m. Par suite on aura

$$s = \frac{\mu_0 - \mu_q}{q} \leqq \frac{\mu_0 - \mu_p}{p}, \qquad (a)$$

et si cette condition est remplie, s peut avoir la valeur indiquée par Lorenz $\frac{\mu_0 - \mu_q}{q}$.

$\frac{\mu_0 - \mu_q}{q}$ est la valeur minimum de s. Supposons que q soit la plus grande valeur pour laquelle $\mu_0 = \mu_q + qs$; alors on aura,

$$\mu_p + ps < \mu_q + qs,$$

si $s > \frac{\mu_0 - \mu_q}{q}$ et $p < q$, et l'on obtiendra une nouvelle valeur de s en cherchant un nombre $r > q$, pour lequel

$$\mu_q + sq = \mu_r + sr \geqq \mu_p + sp, \qquad (b)$$

p étant un nombre quelconque compris entre les limites q et m. Si cette condition est remplie, on peut poser

$$s = \frac{\mu_q - \mu_r}{r - q} \leqq \frac{\mu_q - \mu_p}{p - q}.$$

On reconnait facilement qu'on peut continuer de la même manière en se servant à présent de μ_r comme point de départ, si r est le plus grand nombre pour lequel la condition (b) est remplie, et ainsi de suite.

Le raisonnement de Lorenz n'est pourtant pas exact, car on ne sait pas si les coefficients a ne contiennent pas de variables qui deviennent infinies en même temps que θ.

NOTE 4. On voit immédiatement que

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial\theta_{n-1}}+P\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial\theta_{n-1}}=0;$$

mais on peut écrire

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_{n-1}}\frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x}+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right],$$

où $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$ désigne la dérivée de φ par rapport à x, θ_{n-1} étant considérée comme une variable indépendante de x. Puis on aura

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial\theta_{n-1}}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_{n-1}^2}\frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x}+\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_{n-1}}\right)}{\partial x}\right]=\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_{n-1}}\right)}{\partial x},$$

et de même on obtiendra la valeur de $\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial\theta_{n-1}}$.

NOTE 5. $\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_{n-1}}\right)}{\partial y}$ sera un facteur intégrant si $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_{n-1}}$ n'est pas indépendant de y, c'est à dire ne se réduit pas à une constante ou à une fonction de x seul. Lorenz n'a pas considéré le dernier cas.

NOTE 6. Si η_{n-1} est définie par l'équation

$$t_{n-2}=\int f(\eta_{n-1})\,d\eta_{n-1},$$

on aura

$$\frac{\partial\eta_{n-1}}{\partial t_{n-2}}=\frac{1}{f(\eta_{n-1})},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{n-1}}\frac{1}{f(\eta_{n-1})}\cdot\frac{\partial t_{n-2}}{\partial x}+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right],$$

où $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$ désigne la dérivée de φ par rapport à x, prise en regardant η_{n-1} comme une variable indépendante. Puis on aura

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial\eta_{n-1}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{n-1}}\,\frac{1}{f(\eta_{n-1})}\right)}{\partial\eta_{n-1}}\cdot\frac{\partial t_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]}{\partial\eta_{n-1}},$$

et, après multiplication par $\frac{1}{f(\eta_{n-1})}$,

$$\frac{1}{f(\eta_{n-1})}\,\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial\eta_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{f(\eta_{n-1})}\,\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{n-1}}\,\frac{1}{f(\eta_{n-1})}\right)}{\partial\eta_{n-1}}\,\frac{\partial t_{n-2}}{\partial x} + \frac{1}{f(\eta_{n-1})}\,\frac{\partial\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]}{\partial\eta_{n-1}}$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{1}{f(\eta_{n-1})}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{n-1}}\right)}{\partial\eta_{n-1}}\,\frac{\partial\eta_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial\left[\frac{1}{f(\eta_{n-1})}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{n-1}}\right]}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{1}{f(\eta_{n-1})}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{n-1}}\right)}{\partial x}.$$

De la même manière on obtiendra

$$\frac{1}{f(\eta_{n-1})}\,\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial\eta_{n-1}} = \frac{\partial\left(\frac{1}{f(\eta_{n-1})}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{n-1}}\right)}{\partial y}.$$

ÉQUATIONS
CINÉTIQUES FONDAMENTALES
D'UN SYSTÈME DE POINTS.

EQUATIONS CINETIQUES FONDAMENTALES D'UN SYSTEME DE POINTS.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK 1875, P. 81—86.

Un point donné, fixe dans l'espace, étant déterminé par ses coordonnées a, b, c, convenons que le nombre des points appartenant à un système donné qui se trouvent, à l'instant t, à l'intérieur du parallélipipède limité par les plans a et $a+da$, b et $b+db$, c et $c+dc$ soit représenté par

$$N(t, a, b, c)\, d\varpi.$$

Les points peuvent avoir des vitesses différentes. Ceux d'entre eux dont les vitesses composantes sont comprises entre les limites a' et $a'+da'$, b' et $b'+db'$, c' et $c'+dc'$ seront supposés au nombre de

$$N(t, a, b, c)\, s(t, a, b, c, a', b', c')\, d\varpi\, d\varpi',$$

où $d\varpi' = da'\, db'\, dc'$. La fonction s peut être appelée, d'un terme emprunté au calcul des probabilités, *la probabilité* des composantes de vitesse a', b', c' dans le parallélipipède ϖ et au moment t. D'une manière analogue, soit $s_1(t, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'')$ la probabilité des composantes d'accéleration a'', b'', c'' qui correspondent aux composantes de vitesse a', b', c', aux coordonnées de l'espace a, b, c et au moment t, et ainsi de suite.

Lorsqu'un point d'un système qui, au moment donné t, a pour coordonnées x, y, z et pour vitesses composantes x', y', z', satisfait aux conditions

$$a < x + x'\tau + \ldots < a + da, \quad b < y + y'\tau + \ldots < b + db,$$
$$c < z - z'\tau + \ldots < c + dc,$$

il se trouvera, au bout du temps $t + \tau$, à l'intérieur du parallélipipède ϖ. En négligeant les puissances supérieures de τ, nous pourrons déterminer le nombre total des points qui au moment $t + \tau$ se trouveront à l'intérieur du parallélipipède $d\varpi$ par l'intégrale

$$N(t + \tau, a, b, c)\, d\varpi$$
$$= \iiint dx'dy'dz' \iiint dx\,dy\,dz\, N(t, x, y, z)\, s(t, x, y, z, x', y', z'),$$

où les intégrations par rapport à x, y, z doivent être effectuées entre les limites $a - x'\tau$ et $a + da - x'\tau$, $b - y'\tau$ et $b + db - y'\tau$, $c - z'\tau$ et $c + dc - z'\tau$; celles qui se rapportent à x', y', z' entre les limites à l'extérieur desquelles s s'évanouit, car ces variables doivent parcourir toutes les valeurs possibles.

De cette manière on obtiendra d'abord

$$N(t + \tau, a, b, c) = \iiint dx'dy'dz'\, N(t, x, y, z)\, s(t, x, y, z, x', y', z')$$

où

$$x = a - x'\tau, \quad y = b - y'\tau, \quad z = c - z'\tau,$$

et puis, en comparant les coefficients de τ,

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \iiint dx'dy'dz' \left[\frac{\partial(Nsx')}{\partial a} + \frac{\partial(Nsy')}{\partial b} + \frac{\partial(Nsz')}{\partial c}\right] = 0.$$

Pour abréger, on écrit ici N au lieu de $N(t, a, b, c)$ et s au lieu de $s(t, a, b, c, x'y'z')$.

Nous appellerons l'intégrale

$$\iiint dx'dy'dz'\, sx'$$

la valeur moyenne de x' correspondante au point a, b, c, et nous la désignerons par $\overline{a'}$, et nous désignerons de même les valeurs moyennes de b' et c' par $\overline{b'}$ et $\overline{c'}$. Par

l'emploi de ces notations, l'équation ci-dessus prendra la forme

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial(N\overline{a'})}{\partial a}+\frac{\partial(N\overline{b'})}{\partial b}+\frac{\partial(N\overline{c'})}{\partial c}=0. \qquad (1)$$

D'une manière analogue on pourra déduire de l'état du système au moment t le nombre total des points qui se trouvent, au bout du temps $t+\tau$, à l'intérieur du parallélipipède $d\varpi$, si en même temps les composantes de vitesse sont comprises dans les limites du parallélipipède $d\varpi'$; c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$N(t+\tau, a, b, c)\, s(t+\tau, a, b, c, a', b', c')$$
$$=\iiint dx''dy''dz''\, N(t, x, y, z)\, s s_1,$$

où s dépend des variables t, x, y, z, x', y', z' et s_1 de ces mêmes quantités et, en outre, de $x''\, y''\, z''$, variables qui satisferont aux conditions suivantes

$$a=x+x'\tau,\quad b=y+y'\tau,\quad c=z+z'\tau,$$
$$a'=x'+x''\tau,\quad b'=y'+y''\tau,\quad c'=z'+z''\tau,$$

les puissances supérieures de τ étant négligées. On remplacera donc partout ci-dessus x par $a-a'\tau$, x' par $a'-x''\tau$ et ainsi de suite, et les intégrations seront étendues à toutes les valeurs possibles de x'', y'', z''. On en déduira, par comparaison des coefficients de τ,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial(Ns)}{\partial t}+\frac{\partial(Ns)}{\partial a}a'+\frac{\partial(Ns)}{\partial b}b'+\frac{\partial(Ns)}{\partial c}c'\\&+N\left(\frac{\partial(\overline{sa''})}{\partial a'}+\frac{\partial(\overline{sb''})}{\partial b'}+\frac{\partial(\overline{sc''})}{\partial c'}\right)=0,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

en écrivant N au lieu de $N(t, a, b, c)$ et s au lieu de $s(t, a, b, c, a', b', c')$, tandisque $\overline{a''}, \overline{b''}, \overline{c''}$ sont les valeurs moyennes de x'', y'', z'' qui correspondent au point a, b, c et aux composantes de vitesse a', b', c', c'est à dire

$$\overline{a''} = \iiint dx''\,dy''\,dz''\,s_1\,(t,\,a,\,b,\,c,\,a',\,b',\,c',\,x''\,y''\,z'')\,x''$$

et ainsi de suite.

J'appellerai les équations (1) et (2) *première* et *seconde équation de continuité.* Ce sont les premières de toute une suite d'équations de continuité qui peuvent facilement être formées par le procédé employé ici. Chaque équation de la suite peut sans difficulté être déduite de la suivante. C'est ainsi qu'on retrouvera la première équation de continuité en multipliant la seconde par $da'db'dc'$ et intégrant entre les limites des variables. Pour ces limites s s'évanouira, et l'on aura de plus

$$\iiint da'\,db'\,dc'\,s\,(a,\,b,\,c,\,a',\,b',\,c') = 1\,,$$

si les variables parcourent toutes les valeurs possibles. En général, on peut de cette manière déduire les première, seconde, ... , $(n-1)^{\text{ième}}$ équations de la $n^{\text{ième}}$ qui, par suite, peut être considérée comme une généralisation de toutes les équations précédentes.

Ces équations purement cinétiques, peuvent être employées dans la dynamique de la manière suivante. Imaginons que tous les points du système aient la même masse m, qui est supposée être une quantité invariable comme le nombre de ces points matériels, de manière qu'aucun d'eux ne puisse être divisé en plusieurs et que plusieurs ne puissent être réunis en un.

En général, tout corps est supposé formé de plusieurs systèmes de cette espèce. On ne fait de la sorte aucune hypothèse sur la nature du corps, sauf celle de l'invariabilité de sa masse; supposer le nombre des points invariable au cours des calculs, n'est qu'une fiction purement mathématique sans conséquence physique. Les

équations de continuité établies ci-dessus sont valables pour chaque système en particulier.

De plus toute pression exercée sur un élément superficiel de l'espace peut être considérée comme produite par le mouvement des points matériels qui passent par cet élément, la pression suivant une direction donnée étant définie avec plus de précision comme la quantité de mouvement, estimée suivant la direction donnée, des points qui dans l'unité de temps passent par l'élément considéré. Dans le cas d'une pression variable, cette quantité de mouvement doit être mesurée par la quantité de mouvement au moment considéré. Cette définition est une conséquence directe de la décomposition supposée du corps en points matériels mobiles, et elle aussi n'introduit aucune hypothèse physique.

La pression sur une surface en mouvement peut être conçue d'une manière analogue: il suffit d'imaginer que la surface se meuve en même temps que le corps, de sorte que tout élément de la surface par lequel passe un grand nombre de points matériels recoive le mouvement moyen de ces points. Par „mouvement moyen" on entend un mouvement dont les vitesses composantes suivant les trois axes sont les vitesses des éléments perpendiculaires à ces trois axes se mouvant de manière à faire passer des masses égales des deux côtés.

Si l'on désigne par Σ une somme étendue à tous les systèmes de points matériels, dont est composé le corps, on verra, en employant la notation ci-dessus, que

$$\Sigma m N \overline{a'}\, dt\, db\, dc$$

est la masse totale qui dans l'élément de temps dt passe par la surface latérale $db\, dc$ du parallélipipède. Si cette

surface a une vitesse telle qu'aucune masse n'y passe, on aura

$$\Sigma m N(\overline{a'} - u) = 0.$$

u est donc la composante de la vitesse du mouvement moyen dans la direction de l'axe des x. Les deux autres composantes sont déterminées par

$$\Sigma m N(\overline{b'} - v) = 0, \quad \Sigma m N(\overline{c'} - w) = 0.$$

Si l'on multiplie l'équation (1) par m, et si l'on forme les équations correspondantes pour tous les systèmes, puis qu'on additionne toutes ces équations, on trouvera

$$\Sigma\left[\frac{\partial(mN)}{\partial t} + \frac{\partial(mN\overline{a'})}{\partial a} + \frac{\partial(mN\overline{b'})}{\partial b} + \frac{\partial(mN\overline{c'})}{\partial c}\right] = 0.$$

Cette équation, combinée avec les équations ci-dessus, donnera

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial a} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial b} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial c} = 0, \qquad (3)$$

où l'on a remplacé $\Sigma m N$ par ρ, qui représente en conséquence la somme des masses des points matériels compris dans l'unité de volume; par suite ρ n'est autre chose que la densité du corps au point a, b, c. De plus, comme u, v, w sont les composantes de la vitesse de ce même point du corps, si l'on ne tient compte, comme à l'ordinaire, que du mouvement moyen du corps, l'équation (3) est tout à fait identique à l'équation bien connue qu'on nomme spécialement *l'équation de continuité.*

Si l'on multiplie l'équation (2) par $ma'\,da'\,db'\,dc'$ et qu'on l'intégre entre les limites des variables, puis qu'on additionne les équations correspondantes pour tous les systèmes, on obtiendra

$$\Sigma\left[\frac{\partial(mN\overline{a'})}{\partial t} + \frac{\partial(mN\overline{a'^2})}{\partial a} + \frac{\partial(mN\overline{a'b'})}{\partial b} + \frac{\partial(mN\overline{a'c'})}{\partial c} - mN\overline{\overline{a''}}\right] = 0. \qquad (4)$$

Ici $\overline{\overline{a''}}$ désigne la valeur moyenne de $\overline{a''}$ pour toutes les valeurs de a', b', c'. En ce qui concerne le calcul indiqué, on doit remarquer que l'on a effectué l'intégration par parties des trois derniers termes de l'équation (2) et que les intégrales qui correspondent aux limites de a', b', c' s'évanouissent: en effet s entre comme facteur dans ces intégrales, et les limites de a', b', c' sont choisies de manière que la probabilité s s'évanouisse pour ces limites, qui peuvent être considérées comme finies, même si elles sont aussi grandes qu'on veut.

Par suite si P_1, T_3, T_2 sont les pressions dans les directions des axes des x, des y et des z sur l'unité de surface du corps sur la face latérale $db\,dc$ du parallélipipède $d\varpi$, on aura, en conséquence de la définition donnée,

$$P_1 = \Sigma m N\overline{(a'-u)^2}, \quad T_3 = \Sigma m N\overline{(a'-u)(b'-v)},$$
$$T_2 = \Sigma m N\overline{(a'-u)(c'-v)},$$

d'où, en ayant égard aux équations

$$\Sigma m N\overline{(a'-u)} = 0, \quad \Sigma m N\overline{(b'-v)} = 0, \quad \Sigma m N\overline{(c'-w)} = 0,$$

on déduira

$$\Sigma m N\overline{a'^2} = P_1 + \rho u^2, \quad \Sigma m N\overline{a'b'} = T_3 + \rho uv,$$
$$\Sigma m N\overline{a'c'} = T_2 + \rho uw.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (4), et qu'on en retranche l'équation (3) multipliée par u, on obtiendra

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a}u + \frac{\partial u}{\partial b}v + \frac{\partial u}{\partial c}w\right) + \frac{\partial P_1}{\partial a} + \frac{\partial T_3}{\partial b} + \frac{\partial T_2}{\partial c} = \rho A, \quad (5)$$

où ρA remplace $\Sigma m N\overline{\overline{a''}}$. A peu têtre considéré comme l'accélération du mouvement moyen au point a, b, c dans la direction de l'axe des x.

Des expressions analogues peuvent être formées pour les autres faces latérales du parallélipipède $d\varpi$.

Ces équations sont bien connues et sont employées pour le calcul des mouvements et des pressions dans les corps, tant solides et élastiques que liquides; on y introduit seulement, selon la nature du problème, certaines suppositions restrictives. Au contraire, les équations qui dépendent seulement des mouvements moyens ne suffisent pas à résoudre tous les problèmes proposés par la science moderne, comme la détermination de la diffusion, le frottement intérieur, la propagation de la force vive, qui est aussi intimement liée à la conduction de la chaleur.

Ce sont de tels problèmes qui indiquent la marche suivie ici. Les équations de condition établies ici sont les équations cinétiques fondamentales; car elles expriment les lois générales du mouvement dans l'intérieur des corps, indépendamment des forces mises en jeu, *et elles sont en même temps,* si l'on passe de la manière indiquée aux pressions intérieures des corps, *une généralisation des équations dynamiques ordinaires* (équation (5) et les deux analogues). C'est pourquoi elles peuvent être considérées comme servant d'introduction à la discussion générale des problèmes mentionnés plus haut, tandis que la solution de ces problèmes ne peut, cela va sans dire, être obtenue que par l'introduction d'hypothèses particulières.

SUR LE DÉVELOPPEMENT

DES FONCTIONS ARBITRAIRES

AU MOYEN DE FONCTIONS DONNÉES.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ARBITRAIRES AU MOYEN DE FONCTIONS DONNÉES.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK 1876, P. 129—144.

Le développement d'une fonction donnée $f(x)$ en série infinie ou par une intégrale définie où la variable n'entre que dans des fonctions données peut être rapporté à la forme

$$f(x) = \Sigma_k A_k F(x, k). \tag{1}$$

Le procédé pour la détermination d'un tel développement consiste généralement à déterminer d'abord les coefficients A_k du développement, supposé possible, puis à discuter *les conditions de validité de ce développement.* Nous supposerons que les coefficients sont déterminés par

$$A_k = \int_a^b f(x')\varphi(x', k)\,dx', \tag{2}$$

et que l'intégration est effectuée suivant un chemin réel, de a à b. On reconnaît alors immédiatement que le développement trouvé n'est valable que si x est réel et compris entre les limites a et b; car le second membre de l'expression (1) est indépendant de toutes les valeurs que peut prendre la fonction $f(x)$, quand la variable est imaginaire ou quand elle reste en dehors desdites limites. Après avoir déterminé la fonction $\varphi(x)$, on doit discuter plus en détail les conditions de validité du développe-

ment et cela se fait généralement d'après une méthode que Dirichlet a imaginée à propos des développements au moyen des fonctions circulaires (sin. et cos.) et au moyen des fonctions sphériques (Repert. de Dove, tome 1 et Journal de Crelle, tome 17). La marche de cette méthode est de chercher d'abord la somme d'un nombre fini de termes de la série (1), puis d'exécuter l'intégration indiquée dans (2) et finalement de chercher la valeur limite de la somme, quand le nombre des termes croît à l'infini. Si l'on cherche cette valeur limite avant d'effectuer les intégrations, le résultat sera en général indéterminé, bien que fini; aussi les formules exigent elles que les intégrations soient exécutées d'abord, et, en général, il n'est pas permis d'intervertir l'ordre; pourtant, il va sans dire qu'on a le droit, comme le fait Dirichlet, de sommer d'abord un nombre arbitraire, mais fini, de termes, avant d'effectuer l'intégration.

C'est cette marche qu'on a suivie de préférence, après lui. Ainsi on la retrouvera dans le „Handbuch der Kugelfunctionen“ de Heine, dans les „Partielle Differentialgleichungen“ de Riemann, dans le mémoire de Hankel „Die Fourier'schen Reihen“. Dans ce dernier mémoire (Mathem. Ann., tome 8) la méthode est, en tant que le permet la nature du problème, appliquée pour la première fois au développement par les fonctions cylindriques ou fonctions bessèliennes (de la première espèce). Dans un mémoire de Schläfli, récemment publié (Mathem. Ann., tome 10) le même problème est traité d'une manière nouvelle; mais la méthode est encore celle de Dirichlet.

Sans doute la théorie du développement des fonctions arbitraires au moyen de fonctions données est

d'une grande importance, surtout pour la physique mathématique; aussi est-il à prévoir qu'elle s'étendra successivement à des fonctions de développement beaucoup plus nombreuses que celles qu'on a employées jusqu'ici. Mais la méthode de Dirichlet comporte déjà dans les cas traités par lui-même des difficultés assez considérables, qui proviennent en premier lieu de ce qu'on doit sommer un nombre fini de termes d'une série non convergente et puis intégrer entre des limites finies le résultat trouvé. Mais cette difficulté n'est pas inhérente à la nature du problème. Le problème exige, comme on voit, d'abord une intégration par rapport à x dans (2), et cette opération peut toujours être facilement exécutée, au moins entre deux limites infiniment rapprochées. Puis on peut effectuer la sommation (1), pourvu qu'on se borne à cet élément de l'intégrale; car la série doit toujours à présent être convergente, et en traitant de la même manière tous les éléments dans lesquels l'intégrale (2) peut être décomposée, on obtiendra la somme cherchée.

Pour opérer ladite intégration entre les limites x_1 et x_2, on pourra appliquer la proposition suivante

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_2} dx' \int_{x_1}^{x_2} dx'' (f(x') - f(x''))(\varphi(x') - \varphi(x'')) \\ &= 2(x_2 - x_1) \int_{x_1}^{x_2} f(x')\varphi(x')\,dx' - 2\int_{x_1}^{x_2} f(x')\,dx' \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x')\,dx'.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ici l'on suppose que $x_2 - x_1$ est une quantité infiniment petite. Si les deux fonctions f et φ sont finies et continues entre les limites x_1 et x_2, on reconnaît facilement que le premier membre de l'équation est infiniment petit de l'ordre de $(x_2 - x_1)^4$, tandis que les deux termes

du second membre sont chacun de l'ordre de $(x_2 - x_1)^2$. Dans ce cas, où l'on peut remplacer $\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x')\,dx'$ par $f(x_1)$ ou $f(x_2)$ on aura donc

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x')\,\varphi(x')\,dx' = f(x_1)\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x')\,dx'. \tag{4}$$

Dans le cas où l'une des deux fonctions, $\varphi(x)$ par exemple, est finie mais varie infiniment vite, de manière qu'elle est comparable à $\cos kx$ ou $\sin kx$ pour k infiniment grand, $\varphi(x') - \varphi(x'')$ aura une valeur finie et le premier membre de (3) sera de l'ordre de $\frac{(x_2 - x_1)^2}{k}$, tandis que chacun des deux termes du second membre
* NOTE 1. sera de l'ordre de $\frac{x_2 - x_1}{k}$.* Donc l'équation (4) sera encore valable dans ce cas, qui se présentera précisément dans ce qui suit. Au contraire, si les deux fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont de cette espèce, tous les termes de l'équation (3) seront du même ordre et l'équation (4) ne sera plus valable.

Donc si l'intégrale (2) est décomposée en une somme d'intégrales de la même espèce que le premier membre de l'équation (4) où les deux limites de chaque intégrale sont infiniment rapprochées, l'équation (4) sera valable pour tous les éléments d'intégrale, pourvu que $f(x)$ soit une fonction finie et continue entre les limites a et b et que $\varphi(x)$ soit finie et continue ou varie infiniment vite. Mais, $f(x)$ étant finie et discontinue, si l'on a soin que les points x_1 et x_2 coïncident avec les points de discontinuité de la fonction, ce qui est toujours possible, à condition que la discontinuité ne se produsie qu'en un

nombre fini de points entre a et b, l'équation (4) sera encore applicable dans ce cas.

Si la fonction $f(x)$ devient infinie en un seul point ou en un nombre fini de points c, x_1 ou x_2 devra de même coïncider avec l'un de ces points; par suite, l'un des éléments de l'intégrale desquels on tient compte dans la somme (1) sera

$$\sum_k \int_{x_1}^{c} f(x')\varphi(x', k) F(x, k)\, dx'. \tag{5}$$

Ici x_1 peut être suffisamment voisin de c pour que $f(x')$ soit toujours ou croissante ou décroissante entre les limites de l'intégrale. Alors, d'après une proposition employée par Dirichlet, l'expression ci-dessus sera comprise entre les limites

$$M\int_{x_1}^{c} f(x')\, dx' \quad \text{et} \quad N\int_{x_1}^{c} f(x')\, dx,$$

M et N étant la plus grande et la plus petite des valeurs que peut prendre

$$\sum_k \varphi(x' k) F(x, k)$$

entre les limites de l'intégrale. Donc, si cette quantité est finie, même si elle est indéterminée, et si $f(x)$ devient infinie de telle manière que $\int_a^x f(x')\, dx'$ reste finie et continue pour toute valeur de x comprise entre a et b, la somme (5) convergera vers zéro.

Après avoir déterminé les éléments d'intégrale au moyen de l'équation (4), on doit opérer la sommation par rapport à k indiquée dans l'équation (1). Dans une classe de développements fonctionnels qui sont d'une grande importance pour la physique mathématique, les

k sont les racines de l'équation $F(b, k) = 0$, et le développement entraîne que $f(x)$ soit nulle pour la valeur limite $x = b$.

C'est pourquoi j'exposerai quelques formules générales relatives à la sommation de cette espèce de séries.

Soit donnée une fraction $\frac{p(y)}{q(y)}$, dont le numérateur et le dénominateur peuvent tous deux être développés en série suivant les puissances entières et positives de y, ces séries étant convergentes pour toutes les valeurs de y. De plus, soient k les racines de l'équation $q(y) = 0$; on suppose qu'aucune de ces racines n'annule $p(y)$. On considère l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{p(t)}{q(t)} \cdot \frac{dt}{t-y} = Q, \tag{6}$$

où la variable t est supposée complexe. Cette variable est supposée parcourir dans le sens positif (sens inverse de celui des aiguilles d'une montre) un cercle de rayon ρ et ayant son centre au point origine. Donc si l'on pose $t = \rho e^{\theta i}$, on aura

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{p(\rho e^{\theta i})}{q(\rho e^{\theta i})} \cdot \frac{\rho e^{\theta i} d\theta}{\rho e^{\theta i} - y}. \tag{7}$$

ρ croissant, Q convergera vers zéro, si l'on a

$$\left(\frac{p(\rho e^{\theta i})}{q(\rho e^{\theta i})}\right)^{\rho=\infty} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ pour } \sin\theta \gtrless 0, \\ a, \text{ pour } \sin\theta = 0, \end{array} \right\} \tag{8}$$

où a désigne une quantité finie.

D'autre part, on peut déterminer l'intégrale Q en décrivant dans le sens positif des cercles infiniment petits autour des points qui correspondent aux racines de

l'équation $q(t)(t-y) = 0$. De celle manière, si toutes les racines k sont différentes les unes des autres et différentes de y, on remplacera l'équation (6) par celle-ci

$$Q = \frac{p(y)}{q(y)} + \sum_k \frac{p(k)}{q'(k)(k-y)}. \tag{9}$$

Par suite, on peut égaler cette expression à (7), pourvu que la sommation soit étendue à toutes les racines k plus petites que ρ et que de même y soit plus petit que ρ*. ρ croissant à l'infini, on aura donc, si la condition (8) est remplie, * NOTE 2.

$$\frac{p(y)}{q(y)} + \sum_k \frac{p(k)}{q'(k)(k-y)} = 0, \tag{10}$$

la sommation étant étendue à toutes les racines k (qui sont en nombre infini) rangées d'après l'ordre de grandeur de leurs modules. On voit ainsi que la règle de décomposition des fractions rationelles peut encore être appliquée à l'espèce de fractions considérée ici, pourvu que la condition (8) soit remplie.

Si le développement de $q(y)$ suivant les puissances croissantes de y commence par une puissance positive de y, comme y^m, et si celui de $p(y)$ commence par la même puissance ou par une puissance supérieure, on pourra, pour éviter les racines $k = 0$ communes au numérateur et au dénominateur, diviser p et q par y^m; mais on reconnaît facilement que la formule (10) sera encore valable, si l'on ne fait pas cette réduction, à condition qu'on ne tienne pas compte des racines $k = 0$ dans la sommation.

On peut encore faire ce calcul dans le cas ou l'équation $q(y) = 0$ a des racines égales.

Nous considérerons en particulier le cas de $\frac{p(y)}{(q(y))^2}$, où, comme ci-dessus, $q(y) = 0$ n'admet pas de racines égales ni de racines qui satisfassent à $p(y) = 0$. Alors, par une analyse analogue à la précédente, ou en appliquant les règles de la décomposition des fractions, on trouvera

$$\frac{p(y)}{(q(y))^2} + \sum_k \frac{1}{q'(k)} \frac{d}{dk}\left(\frac{p(k)}{q'(k)(k-y)}\right) = 0, \tag{11}$$

pourvu que la conditions correspondante à (8)

$$\left(\frac{p(\rho e^{\theta i})}{(q(\rho e^{\theta i}))^2}\right)^{\rho=\infty} = \left\{\begin{array}{l} 0, \ \sin\theta \gtrless 0, \\ a, \ \sin\theta = 0, \end{array}\right\} \tag{12}$$

soit remplie. Si le développement de $q(y)$ commence par y^m et celui de $p(y)$ par y^{2m} ou par une puissance supérieure, on peut employer la même formule, à condition qu'on ait soin de négliger les racines $k = 0$.

Je vais maintenant faire l'application de la méthode générale indiquée ici à deux développements d'une fonction arbitraire au moyen des fonctions besséliennes de la première espèce. Ces fonctions sont définies pour tout indice n, entier et positif, par l'égalité

$$\left.\begin{aligned} J_n(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} - \left(\frac{r}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{(n+1)!\,1!} \\ + \left(\frac{r}{2}\right)^{n+4} \cdot \frac{1}{(n+2)!\,2!} - \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

d'où l'on déduit, pour $n = 0$,

$$J_0(r) = 1 - \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2 4^2} - \frac{r^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$$

Nous appellerons l'attention sur les équations sui-

vantes que nous emploierons ultérieurement et qui peuvent facilement être déduites de (13)

$$\frac{d(r^{-n}J_n(r))}{dr} = -r^{-n}J_{n+1}(r), \tag{14}$$

$$\frac{d(r^n J_n(r))}{dr} = r^n J_{n-1}(r), \tag{15}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_n(r)}{dr}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right)J_n(r) = 0. \tag{16}$$

Si l'on admet que les équations (14) et (15) sont encore valables pour $(n-1)$ négatif, on déduira successivement de ces équations

$$J_{-1}(r) = -J_1(r), \quad J_{-2}(r) = J_2(r),$$
$$J_{-n}(r) = (-1)^n J_n(r).$$

L'extension de la définition au cas des indices fractionnaires ne devant être d'aucune utilité dans ce qui suivra, nous l'omettrons. Nous ajouterons encore que $J_n(r)$ est une fonction périodique qui, pour des valeurs croissantes de r, s'approche de $\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\cos\left(r - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$, et que l'équation $J_n(r) = 0$ n'a que des racines réelles: pour la démonstration de ces propriétés, nous renverrons aux „Studien über die Bessel'schen Funktionen" de Lommel.* * NOTE 3.

En conséquence des équations (16), nous aurons

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_n(\alpha r)}{dr}\right) + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)J_n(\alpha r) = 0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_n(\beta r)}{dr}\right) + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)J_n(\beta r) = 0.$$

Si l'on multiplie la première de ces relations, par $J_n(\beta r)$ et la seconde par $J_n(\alpha r)$, on obtiendra par soustraction

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\left(J_n(\beta r)\frac{dJ_n(\alpha r)}{dr}-J_n(\alpha r)\frac{dJ_n(\beta r)}{dr}\right)\right)$$
$$+(\alpha^2-\beta^2)J_n(\alpha r)J_n(\beta r) = 0.$$

Cette équation, multipliée par $r\,dr$ et intégrée entre les limites $r = 0$ et $r = 1$, donnera

$$\left.\begin{aligned}&\beta I_n(\alpha)J'_n(\beta)-\alpha J_n(\beta)J'_n(\alpha)\\&= (\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 J_n(\alpha r)J_n(\beta r)\,r\,dr,\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

où J'_n représente, suivant la notation de Lagrange, la dérivée de J_n.

Si nous supposons que k et k_1 sont des racines différentes de l'équation $J_n(r) = 0$, on aura

$$\int_0^1 J_n(kr)J_n(k_1 r)\,r\,dr = 0, \qquad (18)$$

et si k' et k'_1 sont de racines différentes de la dérivée $J'_n(r)$, l'équation (17) donnera de même

$$\int_0^1 J_n(k'r)J_n(k'_1 r)\,r\,dr = 0. \qquad (19)$$

Différentions l'équation (17) par rapport à β et faisons ensuite $\alpha = \beta$; en ayant égard à l'équation (16), on trouvera

$$2\int_0^1 (J_n(\alpha r))^2\,r\,dr = \left(1-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)(J_n(\alpha))^2+(J'_n(\alpha))^2,$$

et par suite

$$2\int_0^1 (J_n(kr))^2\,r\,dr = (J'_n(k))^2, \qquad (20)$$

$$2\int_0^1 (J_n(k'r))^2\,r\,dr = \left(1-\frac{n^2}{k'^2}\right)(J_n(k'))^2. \qquad (21)$$

Nous considérerons à présent le développement traité par Hankel et Schäfli

$$f(r) = \sum_k A_k J_n(kr), \tag{22}$$

où la sommation est étendue à toutes les racines positives k_1 de $J_n(r) = 0$. D'après ce qui précède, on pourra déterminer les coefficients A_k en multipliant l'équation par $2 J_n(k_1 r) r\, dr$ et intégrant de $r = 0$ à $r = 1$; par où l'on obtiendra, en vertu des équations (18) et (20)

$$2\int_0^1 J_n(k_1 r) r f(r)\, dr = A_k (J'_n(k_1))^2,$$

ou, en écrivant r' au lieu de r et k au lieu de k_1,

$$A_k = \frac{2}{(J'_n(k))^2}\int_0^1 J_n(kr') r' f(r')\, dr'. \tag{23}$$

Il suit de là que le développement (22) déterminé de cette manière ne peut être valable que pour r réel et compris entre 0 et 1. Pour ces limites elles-mêmes, le second membre de (22) s'évanouira, sauf dans le cas $n = 0$ et $r = 0$. Pour discuter avec plus de précision les conditions de validité du développement, il faut considérer la somme

$$\sum_k \frac{2 J_n(kr)}{(J'_n(k))^2}\int_{r_1}^{r_2} J_n(kr') r' f(r')\, dr', \tag{24}$$

où les limites r_1 et r_2 de l'intégrale sont comprises entre 0 et 1 et où $r_2 - r_1$ est une quantité infiniment petite et positive.

Pour exécuter la sommation qui se présente ici, on fera d'abord dans (11) $q(y) = J_n(y)$ et $y = 0$; comme $\frac{d}{dk}\left(k J'_n(k)\right) = 0$, on obtiendra ainsi, d'après (16),

$$\left[\frac{p(y)}{(J'_n(y))^2}\right]^{y=0} = -\sum_k \frac{p'(k)}{(J'_n(k))^2 k}. \tag{25}$$

Si l'on fait de plus $p(y) = J_{n+m}(yr)\,J_{n+m}(yr_1)$, où m est un entier positif ou 0, on trouvera sans difficulté que la condition (12) est remplie si la somme de r et r_1, qui
* NOTE 4. tous deux sont positifs, est plus petite que 2*, et comme on obtiendra au moyen de (14) et (15)

$$p'(k) = r\,J_{n+m-1}(kr)\,J_{n+m}(kr_1) - r_1 J_{n+m}(kr)\,J_{n+m+1}(kr_1),$$

l'équation (25) donnera pour $m > 0$

$$\sum_k \frac{J_{n+m-1}(kr)\,J_{n+m}(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k} = \frac{r_1}{r}\sum_k \frac{J_{n+m}(kr)\,J_{n+m+1}(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k}.$$

Ces séries sont convergentes et les sommes conservent pour des m croissants une valeur finie, ce qu'on peut reconnaître en introduisant les valeurs limites des fonc-
* NOTE 5. tions bésseliennes pour k croissant à l'infini*. Si donc on fait successivement $m = 1, 2, 3, \ldots$, et si l'on multiplie les équations obtenues de cette manière, on reconnaît que pour $r_1 < r$

$$\sum_k \frac{J_n(kr)\,J_{n+1}(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k} = 0, \quad (r_1 < r). \tag{26}$$

Pour $m = 0$, le premier membre de (25) deviendra $r^n r_1^n$ et l'on aura, à cause du résultat ci-dessus,

$$2\sum_k \frac{J_{n-1}(kr)\,J_n(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k} = -r^{n-1} r_1^n, \quad r_1 < r. \tag{27}$$

La somme est doublée ici, parce que le même terme se répète pour deux racines égales, mais de signes contraires; elle ne s'étend donc qu'aux racines positives.

Ensuite, pour déterminer les mêmes sommes dans

le cas de r_1 égal ou supérieur que r, nous considérerons l'expression

$$u = 2\Sigma \frac{J_n(kr)\,J_n(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k^2}.$$

En employant les formules (14) et (15) on en déduira

$$\frac{d(ur_1^{-n})}{dr_1} = -2r_1^{-n}\sum_k \frac{J_n(kr)\,J_{n+1}(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k},$$

$$\frac{d(ur^n)}{dr} = r^n \sum_k \frac{J_{n-1}(kr)\,J_n(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k}.$$

Si nous avons comme ci-dessus $r_1 < r$, on verra, d'après (26) et (27), que la première de ces expressions s'évanouit; la seconde devient $-r^{2n-1}r_1^n$. Il en résulte que

$$u = \frac{r_1^n}{2n}(cr^{-n} - r^n)$$

où c est une constante provisoirement indéterminée. On aura de plus

$$\frac{d(ur_1^n)}{dr_1} = 2r_1^n\Sigma \frac{J_n(kr)\,J_{n-1}(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k} = r_1^{2n-1}(cr^{-n} - r^n).$$

Toutes ces équations qui sont déduites de (26) et (27) sont, comme ces relations elles-mêmes, valables pour $r_1 < r$ et $r + r_1 < 2$. On peut donc poser $r = 1$, si r_1 reste plus petit que l'unité, et si l'on porte cette valeur de r dans la dernière équation, $J_n(k)$ étant nul, on trouvera $c = 1$. Si l'on tient compte de cette valeur de c, la même équation donnera, par permutation de r avec r_1,

$$2\sum_k \frac{J_{n-1}(kr)\,J_n(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k} = r^{n-1}(r_1^{-n} - r_1^n), \quad (r_1 > r). \qquad (28)$$

Enfin, si dans la relation

$$\frac{d(u\,r^{-n})}{dr} = -2\,r^{-n}\sum_k{}' \frac{J_{n+1}(kr)\,J_n(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k},$$

on introduit la valeur trouvée de u et qu'on permute r et r_1, on obtiendra

$$2\sum_k{}' \frac{J_n(kr)\,J_{n+1}(kr_1)}{(J'_n(k))^2 k} = r^n r_1^{-n-1}, \quad (r_1 > r). \tag{29}$$

La fonction u elle-même peut facilement être déterminée, si $r_1 > r$, en permutant r_1 et r. On verra alors que cette fonction qui est continue, acquiert pour $r_1 = r$ la valeur $\frac{r^n}{2n}(r^{-n} - r^n)$, sauf dans le cas limite $r = 0$. Par conséquent, on aura

$$2\sum_k{}' \frac{(J_n(kr))^2}{(J'_n(k))^2 k^2} = \frac{r^n}{2n}(r^{-n} - r^n),$$

équation qui, multipliée successivement par r^{2n} et par r^{-2n}, donnera, après différentation par rapport à r,

$$2\sum_k{}' \frac{J_{n-1}(kr)\,J_n(kr)}{(J'_n(k))^2 k} = \frac{1}{2r} - r^{2n-1}, \tag{30}$$

$$2\sum_k{}' \frac{J_n(kr)\,J_{n+1}(kr)}{(J'_n(k))^2 k} = \frac{1}{2r}, \tag{31}$$

pour $0 < r < 1$.

Nous revenons maintenant à la sommation qui figure dans l'expression (24). D'après l'équation (4) et sous les conditions relatives à cette équation, on pose

$$\int_{r_1}^{r_2} J_n(kr')\,r'\,f(r')\,dr' = f(r_1)\,r_1^n \int_{r_1}^{r_2} J_n(kr')\,r'^{1-n}\,dr';$$

après l'intégration faite, cette expression deviendra

$$-\frac{f(r_1)\,r_1^n}{k}\left[r_2^{1-n}\,J_{n-1}(kr_2) - r_1^{1-n}\,J_{n-1}(kr_1)\right], \tag{32}$$

où l'on pourrait d'ailleurs dans l'expression $f(r_1)r_1^n$ remplacer r_1 par r_2 ou par une quantité arbitraire entre r_1 et r_2. Il reste, pour obtenir l'expression (24), à calculer les deux sommes

$$r_2^{1-n}\sum_k \frac{2J_n(kr)J_{n-1}(kr_2)}{(J_n'(k))^2 k} \quad \text{et} \quad r_1^{1-n}\sum_k \frac{2J_n(kr)J_{n-1}(kr_1)}{(J_n'(k))^2 k}.$$

D'après (28), ces deux sommes sont pour $r > r_2$ égales à $r^{-n} - r^n$; de même d'après (27) elles sont égales, si $r < r_1$, à r^{-n}. Au contraire, si r est compris entre r_2 et r_1, leur différence sera $-r^{-n}$. On voit par là que l'expression (24) s'évanouit, à moins que r soit compris entre les limites r_1 et r_2, auquel cas elle est égale à $f(r)$. Donc le développement (22) est valable pour toute fonction $f(r)$ finie et continue entre les limites 0 et 1.

Si $f(r)$ est une fonction discontinue pour un nombre fini de valeurs de r, on fait coïncider, comme nous l'avons dit ci-dessus, les limites r_1 ou r_2 avec les points de discontinuité, lorsque ceux-ci sont infiniment rapprochés de ces limites. Si de plus r tombe en un point de discontinuité, on verra d'après (30) que, pour $r = r_1$ ou $r = r_2$, l'expression (24) est égale à $\frac{1}{2}f(r)$, ce qui montre que le développement (22) donne, pour les points de discontinuité, la valeur moyenne des deux valeurs de $f(r)$.

Si r et r_2 sont tous deux égaux à l'unité, on ne peut plus employer les formules de sommation qui supposent $r + r_2 < 2$, mais on reconnaît immédiatement que le développement (22) s'évanouit pour $r = 1$. Pour $r = r_1 = 0$, la formule de sommation (30), qu'il faudrait employer, cesse de même d'être valable, et le développement (22), ainsi que nous l'avons vu, se réduit

à zéro, à l'exception du cas où l'on a en même temps $n = 0$.

Nous étudierons le dernier cas plus en détail. Il est évident que pour $r = 0$ tous les éléments de l'intégrale (24) s'évanouiront par la sommation, à l'exception de celui qui correspond à $r_1 = 0$. Donc si l'on suppose en même temps n égal à zéro dans (23), on pourru écrire

$$A_k = \frac{2f(0)}{(J'_0(k))^2}\int_0^1 J_0(kr')\,r'\,dr' = -\frac{2f(0)}{J'_0(k)\,k},$$

par où le développement (22) deviendra pour $r = 0$

$$-f(0)\sum_k{}' \frac{2}{J'_0(k)\,k}.$$

Cette sommation peut facilement être exécutée au moyen de la formule (10), si l'on pose $p(y) = 1$, $q(y) = J_0(y)$ et $y = 0$ ce qui donnera

$$\sum_k{}' \frac{2}{J'_0(k)\,k} = -1.$$

Il en résulte que le développement (22) est encore valable dans le cas considéré.

Reste à rechercher, si le développement est encore valable quand $f(r)$ devient infinie, tandis que $\int_0^r f(r)\,dr$ est finie et continue. Cela dépend, aínsi que nous l'avons prouvé, de la sommation qui figure dans (22), si elle donne un résultat fini, même s'il est indéterminé, quand la sommation est exécutée avant l'intégration, r et r' étant différents. La somme à discuter est

$$\sum_k{}' \frac{J_n(kr)\,J_n(kr')}{(J'_n(k))^2} \quad \text{pour } r \gtrless r'. \tag{33}$$

Dans cette somme $J_n(rk)$ s'approche de la valeur $\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos\left(kr-\frac{2n+1}{4}\pi\right)$, pour des valeurs croisantes de k, tandis que la $m^{\text{ième}}$ racine s'approche de la valeur $\left(m+\frac{2n-1}{4}\right)\pi$.

Si l'on compare la série ci-dessus avec

$$\Sigma\frac{1}{\sqrt{rr'}}\cos\left(k_m r-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\cos\left(k_m r'-\frac{2n+1}{4}\pi\right), \quad (34)$$

où $k_m=\left(m+\frac{2n-1}{4}\right)\pi$ et où m parcourt toutes les valeurs entières de 1 jusqu'à ∞, on reconnaît que les termes de ces deux séries tendent à devenir les mêmes. Néanmoins il se peut que les différences des termes correspondants des deux séries ne forment pas une série convergente; aussi doit-on s'assurer du fait en développant les termes de la première série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{k}$. On peut d'ailleurs déterminer directement la différence des deux séries de la manière suivante.* Si l'on pose

* NOTE 6.

$$p(y)=\frac{y}{r'^2-r^2}\left(rJ_n(yr')J'_n(yr)-r'J_n(yr)J'_n(yr')\right), \quad q(y)=J_n(y),$$

$$p_1(y)=\frac{y}{\sqrt{rr'}}\left[-r\cos\left(yr'-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\sin\left(yr-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right.$$
$$\left.+r'\cos\left(yr-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\sin\left(yr'-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right],$$

$$q_1(y)=\cos\left(y-\frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

et si l'on forme les fractions $\frac{p(y)}{(q(y))^2}$ et $\frac{p_1(y)}{(q_1(y))^2}$, bien qu'on

ne puisse pas décomposer chacune d'elles en particulier en une somme de la manière indiquée dans (11), parce que la condition (12) n'est pas remplie, on pourra pourtant appliquer l'équation (11) à la différence des deux fractions, car ici la condition (12) est remplie, ce qui est facile à reconnaître. De cette manière, on obtiendra précisément la différence des deux séries en question (33) et (34) pour le même nombre (infini) de termes, et comme chaque fraction en particulier s'évanouit pour $y = 0$, on voit que la différence cherchée est 0. Cependant la série (34) donne une somme finie, mais indéterminée; la série (33) se comportera donc de la même manière. Il suit de là que le développement (22) est valable même si $f(r)$ devient infinie, pourvu que $\int_0^r f(r)\,dr$ reste finie et continue.

J'appelerai finalement l'attention sur un développement nouveau au moyen des fonctions besséliennes, savoir

$$f(r) = \sum_{k'} B_{k'} J_n(k'r), \tag{35}$$

où les k' sont les racines de l'équation $J'_n(r) = 0$. Pour déterminer les coefficients $B_{k'}$, multiplions les deux membres par $J_n(k'_1 r)\,r\,dr$ et intégrons de $r = 0$ jusqu'à $r = 1$; nous obtiendrons ainsi, en vertu des équations (19) et (21)

$$2\int_0^1 J_n(k'_1 r)\,r\,f(r)\,dr = B_{k'_1}\left(1 - \frac{n^2}{k'^2_1}\right)(J_n(k'_1))^2.$$

De là résulte

$$B_{k'} = \frac{2}{\left(1 - \frac{n^2}{k'^2}\right)(J_n(k'))^2}\int_0^1 J_n(k'r')\,r'\,f(r')\,dr'. \tag{36}$$

On peut rechercher les conditions de validité de ce développement par le même procédé qu'on a employé pour l'équation (22).* C'est seulement pour $n = 0$ que le développement n'est pas valable, car alors il faut ajouter une constante C, qui n'entre pas dans la détermination de $B_{k'}$, puisqu'on doit avoir * NOTE 7.

$$\int_0^1 J_0(k'r)\, r\, dr = \frac{J_1(k')}{k'} = -\frac{J'_0(k')}{k'} = 0.$$

Pour déterminer cette constante qu'on doit ajouter au second membre de (35) pour $n = 0$, on peut multiplier cette équation par $r\,dr$ et intégrer de $r = 0$ jusqu'à $r = 1$. On trouvera de cette manière que le développement (35) devient pour $n = 0$,

$$f(r) = 2\int_0^1 r' f(r')\, dr' + \Sigma \frac{2 J_0(k'r)}{(J_0(k'))^2} \int_0^1 J_0(k'r')\, r' f(r')\, dr'. \quad (35')$$

Les deux développements (22) et (35) peuvent être employés dans la physique mathématique pour calculer le potentiel (par exemple, la température ou la tension électrique) dans l'intérieur d'un cylindre droit à base circulaire, quand on donne pour les deux bases le potentiel ou sa dérivée suivant la direction de l'axe (correspondant à la quantité de chaleur ou d'électricité qui entre), tandis que le potentiel ou sa dérivée suivant la direction perpendiculaire à l'axe est donné égal à zéro sur toute la surface courbe.

Dans le premier des deux cas, le potentiel peut facilement être déterminé au moyen de (22), dans le second par (35). Donc les deux développements ont des applications correspondantes et se complètent l'un par l'autre.

NOTES.

NOTE 1. Lorenz dit que les deux membres seront de l'ordre de $\frac{(x_2-x_1)^2}{k}$ et de l'ordre de $\frac{x_2-x_1}{k}$: en réalité ils sont de l'ordre de $\frac{(x_2-x_1)^3}{k}$ et de $\frac{(x_2-x_1)^2}{k}$, ce qui pourtant n'entraîne aucune modification dans les résultats.

NOTE 2. Lorenz appelle quantité complexe *plus petite que* ρ, une quantité dont le module est plus petit que ρ.

NOTE 3. La proposition concernant la réalité des racines n'est, en général, valable que si l'indice de la fonction J est un nombre entier.

NOTE 4. Cela devient évident, si l'on introduit les valeurs limites des fonctions pour une variable indépendante complexe, dont le module croît à l'infini.

NOTE 5. On reconnaît facilement que la série formée en remplaçant les fonctions bésseliennes par leurs valeurs limites est convergente; mais cela n'implique pas que la série originaire soit convergente. La démonstration, pour être rigoureuse, exigerait que les différences des termes correspondants des deux séries formassent une série convergente.

NOTE 6. Pour contrôler les propositions de Lorenz, nous devons chercher les valeurs des expressions $\frac{p(y)}{(q(y))^2}$ et $\frac{p_1(y)}{(q_1(y))^2}$ pour les valeurs de y dont le module est très grand.

Pour de très grands modules de y nous aurons, en employant la même proposition que ci-dessus sur la valeur limite de $J_n(y)$,

$$\frac{p(y)}{(q(y))^2} = \frac{y}{r'^2-r^2}\left[\frac{\sqrt{\frac{r'}{r}}\cos\left(yr-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\sin\left(yr'-\frac{2n+1}{4}\pi\right)}{\cos^2\left(y-\frac{2n+1}{4}\pi\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{\frac{r}{r'}}\cos\left(yr'-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\sin\left(yr-\frac{2n+1}{4}\pi\right)}{\cos^2\left(y-\frac{2n+2}{4}\pi\right)}\right]$$

$$= \frac{p_1(y)}{(q_1(y))^2}\,\frac{1}{r'^2-r^2}.$$

Si l'on pose $y = \rho e^{i\theta}$, ρ étant infiniment grand, on peut choisir ρ de manière que $\cos\left(y-\frac{2n+1}{4}\pi\right)$ ne soit égal à zéro pour aucune valeur de θ. Dans cette supposition, $\frac{p(y)}{(q(y))^2}-\frac{p_1(y)}{(q_1(y))^2}\frac{1}{r'^2-r^2}$ sera fini pour $\sin\theta = 0$ et $\frac{p(y)}{(q(y))^2}$ s'évanouira pour toute autre valeur de θ, car l'expression $\frac{p(y)}{(q(y))^2}$ sera du même ordre de grandeur que

$$\rho e^{\rho(r+r'-2)|\sin\theta|},$$

$|\sin\theta|$ étant la valeur numérique de $\sin\theta$, et comme cette expression s'évanouit pour $\rho = +\infty$, l'expression en question s'évanouira de même.

Du reste, je suppose que Lorenz a écrit par inadvertance le dénominateur r'^2-r^2 de $p(y)$ et que ce dénominateur doit être négligé.

NOTE 7. Pour examiner avec plus de précision les valeurs des séries

$$u = \sum_{k'} \frac{2 J_n(k'r) \int_0^1 J_n(k'r') r' f(r') dr'}{\left(1 - \frac{n^2}{k'^2}\right) (J_n(k'))^2}$$

on a besoin de valeurs des séries

$$\sum_{k'} \frac{2 J_n(k'r_1) J_n(k'r_2)}{(k'^2 - n^2)(J_n(k'))^2}.$$

Pour trouver la somme d'une telle série, on considère l'expression $\left[\frac{p(y)(y^2-n^2)}{y^2(J_n'(y))^2}\right]$ en posant dans (11) $q(y) = yJ_n'(y)$ et en remplaçant $p(y)$ par $p(y)(y^2-n^2)$, ce qui donne

$$\left[\frac{p(y)(y^2-n^2)}{y^2(J_n'(y))^2}\right] = -\sum \frac{k'}{(k'^2-n^2) J_n(k')} \frac{d}{dk'} \left(\frac{k' p(k')}{J_n(k')(k'-y)}\right),$$

relation où l'on doit pourtant supposer que $p(y)$ contient en facteur y^{2n} $(n > 0)$ ou une puissance supérieure de y. Dans cette supposition, on aura pour $y = 0$

$$\left[\frac{p(y)(y^2-n^2)}{y^2(J_n'(y))^2}\right]^{y=0} = -\sum \frac{k' p'(k')}{(k'^2-n^2)(J_n(k'))^2}. \qquad (1)$$

Si l'on pose ici

$$p(y) = J_{n+m}(ry) J_{n+m}(r_1 y),$$

on aura pour $m > 0$, $n > 0$

$$\sum \frac{k' J_{n+m-1}(k'r) J_{n+m}(k'r_1)}{(k'^2-n^2)(J_n(k'))^2} = \frac{r_1}{r} \sum \frac{k' J_{n+m}(k'r) J_{n+m+1}(k'r_1)}{(k'^2-n^2)(J_n(k'))^2}.$$

Ces séries sont convergentes pour $r_1 + r < 2$ et l'on verra de la même manière que plus haut (p. 506) qu'elles s'évanouissent si $r_1 < r$. Par conséquent

$$\sum_{k'} \frac{k' J_n(k'r) J_{n+1}(k'r_1)}{(k'^2 - n^2)(J_n(k'))^2} = 0 \quad (r_1 < r).$$

Si $m = 0$, $n > 0$, le premier membre de l'équation (1) devient $-r^n r_1^n$, d'où résulte

$$2 \sum_{k'} \frac{k'}{(k'^2 - n^2)} \frac{J_{n-1}(k'r) J_n(k'r_1)}{(J_n(k'))^2} = r^{n-1} r_1^n \quad (r_1 < r).$$

Par la méthode qu'emploie Lorenz on obtiendra la valeur de

$$u = 2 \sum_{k'} \frac{J_n(k'r) J_n(k'r_1)}{(k'^2 - n^2)(J_n(k'))^2}.$$

On trouve pour $r_1 < r$

$$u = \frac{r_1^n}{2n} (r^n + r^{-n}),$$

et pour $r_1 > r$

$$2 \sum_{k'} \frac{J_n(k'r) J_{n+1}(k'r_1) k'}{(k'^2 - n^2)(J_n(k'))^2} = r^n r_1^{-n-1},$$

$$2 \sum_{k'} \frac{J_{n-1}(k'r) J_n(k'r_1) k'}{(k'^2 - n^2)(J_n(k'))^2} = r^{n-1} (r_1^n + r_1^{-n}).$$

Si l'on fait tendre r_1 vers la valeur r, on voit que u se rapprochera de $\frac{r^n}{2n} (r^n + r^{-n})$ que r_1 soit plus grand que r, ou qu'il soit plus petit. On aura donc, si $r < 1$,

$$2 \sum_{k'} \frac{(J_n(k'r))^2}{(k'^2 - n^2)(J_n(k'))^2} = \frac{r^n}{2n} (r^{-n} + r^n),$$

d'où l'on déduira facilement

$$2 \sum_{k'} \frac{J_{n-1}(k'r) J_n(k'r) k'}{(k'^2 - n^2)(J_n(k'))^2} = \frac{1}{2r} + r^{2n-1},$$

$$2 \sum_{k'} \frac{J_n(k'r) J_{n+1}(k'r) k'}{(n^2 - k'^2)(J_n(k'))^2} = \frac{1}{2r}$$

A présent, on peut, de la manière développée par Lorenz, chercher la valeur de la série en question,

$$\sum_{k'} \frac{2\, J_n(k'r)}{\left(1-\frac{n^2}{k'^2}\right) J_n(k')^2} \int_0^1 J_n(k'r')\, r' f(r')\, dr'.$$

Les développements faits dans cette note ne sont pourtant pas valables pour $n = 0$. Il faut dans ce cas décomposer l'expression $\frac{p(y)}{(J_0'(y))^2}$ en fractions partielles et chercher la valeur de l'expression pour $y = 0$. Si l'on pose

$$p(y) = J_m(ry)\, J_m(r_1 y),$$

on aura comme ci-dessus

$$\lim \left[\frac{J_m(ry)\, J_m(r_1 y)}{(J_0'(y))^2}\right]^{y=0} = 0$$

pour $m > 1$. Mais comme, $J_0'(y) = -J_1(y)$, on aura, pour $m = 1$,

$$\lim \left[\frac{J_1(ry)\, J_1(r_1 y)}{(J_0'(y))^2}\right]^{y=0} = r r_1$$

$$= -2 \sum \frac{r\, J_0(k'r)\, J_1(k'r_1) - r_1 J_1(k'r)\, J_2(k'r_1)}{k'\,(J_0(k'))^2},$$

et, comme le dernier terme s'évanouit pour $r_1 < r$,

$$-r_1 = 2 \sum \frac{J_0(k'r)\, J_1(k'r_1)}{k'(J_0(k'))^2} \text{ pour } r_1 < r.$$

On doit ensuite chercher la valeur de

$$\frac{J_0(yr)\, J_0(yr_1)}{(J_0'(y))^2}.$$

Ici, l'on peut décomposer la fraction comme à l'ordinaire, mais on doit tenir compte de la racine $y = 0$ de l'équation $J_0'(y) = 0$, valeur qui ne satisfait pas à l'équation $J_0(yr)\, J_0(yr_1) = 0$.

On obtiendra ainsi

$$\frac{J_0(yr)\,J_0(yr_1)}{(J_0'(y))^2} = \frac{4}{y^2} + 2\,\Sigma\,\frac{1}{J_0(k')}\,\frac{d}{dk'}\left(\frac{J_0(k'r)\,J_0(k'r_1)}{(k'-y)\,J_0''(k')}\right),$$

ou bien, si l'on fait tendre y vers zéro

$$\lim\left(\frac{4}{y^2} - \frac{J_0(yr)\,J_0(yr_1)}{(J_0'(y))^2}\right)^{y=0}$$

$$= -2\,\Sigma\,\frac{rJ_1(k'r)\,J_0(k'r_1) + r_1 J_1(k'r_1)\,J_0(k'r)}{k'(J_0(k'))^2}.$$

Mais

$$\lim\left(\frac{4}{y^2} - \frac{J_0(yr)\,J_0(yr_1)}{(J_0'(y))^2}\right)^{y=0} = r^2 + r_1^2 - 1.$$

Si l'on suppose $r < r_1$, on aura donc

$$-2\,\Sigma\,\frac{r_1 J_1(k'r_1)\,J_0(k'r)}{k'\,(J_0(k'))^2} = r_1^2 - 1.$$

A présent nous pouvons sans difficulté trouver la valeur de la série

$$u = 2\,\Sigma\,\frac{J_0(k'r)}{(J_0(k'))^2}\int_0^1 J_0(k'r')\,r'\,f(r')\,dr'.$$

Si r_1 et r_2 sont infiniment rapprochés, et sous la condition que $f(r)$ reste finie et continue, on aura

$$\int_{r_1}^{r_2} J_0(k'r')\,r'\,f(r')\,dr' = f(r_1)\int_{r_1}^{r_2} J_0(k'r')\,r'\,dr'$$

$$= \frac{f(r_1)}{k'}\,[r_2 J_1(k'r_2) - r_1 J_1(k'r_1)],$$

et, par conséquent,

$$2\,\Sigma\,\frac{J_0(k'r)}{(J_0(k'))^2}\int_{r_1}^{r_2} J_0(k'r')\,r'\,f(r')\,dr'$$

$$= f(r_1)\left[2\,\Sigma\,\frac{r_2 J_0(k'r)\,J_1(k'r_2)}{k'\,(J_0(k'))^2} - 2\,\Sigma\,\frac{r_1 J_0(k'r)\,J_1(k'r_1)}{k'\,(J_0(k'))^2}\right]$$

$$= f(r_1)\,[-r_2^2 + r_1^2], \quad \text{si } r > r_2 \text{ ou } r < r_1.$$

Si $r_2 > r > r_1$, l'expression est égale à $(1 - r_2^2 + r_1^2) f(r)$. Si r_1 et r_2 sont infiniment rapprochés, on peut poser $r_2 - r_1 = dr_1$, $r_1 + r_2 = 2r_1$, et en prenant la somme de tous les éléments de l'intégrale, on obtiendra

$$u = f(r) - 2\int_0^1 r_1 f(r_1)\, dr_1,$$

ce qui démontre la proposition de Lorenz.

SUR LES NOMBRES PREMIERS.

SUR LES NOMBRES PREMIERS.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK 1878, P. 1—3.

Il est toujours possible d'obtenir une expression exacte de la forme

$$A_{p,n} = B_p \cdot n + C_{p,n} \tag{1}$$

du nombre $A_{p,n}$ des termes de la suite $1, 2, 3 \ldots n$ qui ne sont pas divisibles par les nombres premiers $2, 3 \ldots p$, $C_{p,n}$, étant une fonction périodique qui reprend les mêmes valeurs quand n augmente du produit des nombres premiers donnés.

Cette fonction périodique peut d'ailleurs, grâce à des méthodes bien connues, être déterminée au moyen des fonctions trigonométriques. En effectuant ce calcul, j'ai trouvé que le résultat peut être exprimé sous forme simple par la fonction périodique

$$n_m = \frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}} - \frac{\sin\frac{2n\pi}{m}}{\sin\frac{2\pi}{m}} + \ldots - \frac{\sin\frac{(m-1)n\pi}{m}}{\sin\frac{(m-1)\pi}{m}}, \tag{2}$$

où m est un nombre impair, n un nombre pair. On obtiendra ce résultat de la manière la plus facile, si l'on exécute la sommation, les fonctions trigonométriques étant exprimées en exponentielles imaginaires. On trouvera de cette manière

* NOTE 1.

$$n_m = n - 2mr^* \tag{3}$$

r étant le nombre des termes de la série $1, 3, 5 \ldots (n-1)$ divisibles par m. Il s'ensuit que

$$r = \frac{n - n_m}{2m}; \tag{4}$$

ainsi r est exprimé par la fonction trigonométrique n_m.

Dans la série $1, 2, 3 \ldots n$ (n pair) se trouvent $\frac{1}{2}n$ nombres qui ne sont pas divisibles par 2. Des nombres restants impairs $\frac{n-n_3}{2\cdot 3}$ sont d'après (4) divisibles par 3. Le nombre des termes de la série $1, 2, 3 \ldots n$ qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, est donc $\frac{1}{2}(n - \frac{1}{3}(n - n_3))$. Si l'on en soustrait, de plus, le nombre des nombres divisibles par 5, on soustrait deux fois les nombres divisibles par $3\cdot 5$; c'est pourquoi l'on doit ajouter le dernier nombre à la différence. Par conséquent, le nombre des nombres non divisibles par 2, 3 et 5 est

$$\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{3}(n - n_3) - \frac{1}{5}(n - n_5) + \frac{1}{3\cdot 5}(n - n_{3,5})\right).$$

On reconnaît de cette manière sans difficulté qu'on a dans la formule générale (1)

$$B_p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p}\right), \tag{5}$$

et, en se servant d'une notation symbolique,

$$C_{p,n} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{n_3}{3}\right)\left(1 - \frac{n_5}{5}\right)\ldots\left(1 - \frac{n_p}{p}\right)\right], \tag{6}$$

où l'on doit, après avoir exécuté la multiplication, remplacer $n_m n_q$ par n_{mq}. Ces formules sont valables pour

n pair; mais, comme n est lui-même un nombre non premier, on doit avoir

$$A_{p,n-1} = A_{p,n}. \tag{7}$$

Si, dans l'expression (2), l'on fait parcourir à n toutes les valeurs paires à partir d'un nombre arbitraire n_1 jusqu'à $n_1 + 2m - 2$, et si l'on fait la sommation des valeurs correspondantes n_m, le résultat s'évanouira. Il s'ensuit que pareillement la somme des $C_{p,n}$ s'évanouira, si n parcourt les valeurs d'une série de nombres pairs consécutifs dont le nombre est $3 \cdot 5 \ldots p$.

D'après (7) on peut poser

$$A_{p,n-1} = B_p(n-1) + B_p + C_{p,n},$$

et, par conséquent, on aura, pour n pair,

$$C_{p,n-1} = B_p + C_{p,n}.$$

La valeur moyenne de $C_{p,n}$ est, par conséquent, si n parcourt toute la série des nombres pairs et impairs jusqu'à $2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p$, égale à $\frac{1}{2} B_p$.

Si $\varphi(n)$ désigne le nombre des nombres premiers dans la suite des nombres entiers $1, 2, 3 \ldots n$, et si p est le plus grand nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, on aura

$$A_{p,n} = \varphi(n) - \varphi(p) + 1, \tag{8}$$

car $A_{p,n}$ est le nombre des nombres premiers inférieurs à n, à l'exception des nombres premiers eux mêmes, $2, 3, 5 \ldots p$ dont le nombre est $\varphi(p) - 1$. On aura donc approximativement, en négligeant la partie périodique,

$$\varphi(n) - \varphi(p) + 1 = B_p \cdot n,$$

expression assez bien connue. La fonction $\varphi(n)$ a été l'objet de recherches si approfondies que je n'ai rien

d'essentiellement nouveau à en dire. Pourtant, je ne me souviens pas d'avoir vu aucun essai fait en vue de déterminer $\varphi(n)$ par une équation différentielle, problème qui pourtant peut facilement être résolu.

Qu'on pose approximativement

$$\varphi(p^2)-\varphi(p) = B_p \cdot p^2,$$

et, p_1 étant le nombre premier qui suit p,

$$\varphi(p_1^2)-\varphi(p_1) = B_{p_1} \cdot p_1^2 = B_p\left(1-\frac{1}{p_1}\right)p_1^2.$$

Si l'on considère $\varphi(p)$ comme une fonction continue d'une variable continue, et si l'on développe cette fonction en série de Taylor, on obtiendra, dans l'hypothèse où p_1-p est très petit en comparaison de p,

$$\frac{d}{dp}(\varphi(p^2)-\varphi(p))(p_1-p) = B_p \cdot 2p(p_1-p)-B_p p.$$

De la même manière on déduira de l'équation
* NOTE 2. $\varphi(p_1)-\varphi(p) = 1$ l'équation $\varphi'(p)(p_1-p) = 1$*; puis, par élimination de p_1-p et de B_p, on obtiendra

$$\frac{d}{dp}\, l\left(\varphi(p^2)-\varphi(p)\right) = \frac{2-\varphi'(p)}{p}. \qquad (9)$$

Pour les très grandes valeurs de p on déduira facilement de cette équation la formule de Gauss $\varphi(p) = \int_0^p \frac{dx}{lx}$, la première approximation étant

$$\varphi(p^2)-\varphi(p) = \int_p^{p^2} \frac{dx}{lx} = \frac{p^2}{2\,lp},$$

valeur qui satisfait à l'équation différentielle.* D'ailleurs, l'intégrale complète de l'équation (9) doit contenir pour les valeurs finies de p une fonction arbitraire ou un nombre illimité de constantes arbitraires.

* NOTE 3.

NOTES.

NOTE 1. On aura, n étant un nombre pair,

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}} = \frac{e^{\frac{in\pi}{m}} - e^{-\frac{in\pi}{m}}}{e^{\frac{i\pi}{m}} - e^{-\frac{i\pi}{m}}} = e^{\frac{i(n-1)\pi}{m}} + e^{\frac{i(n-3)\pi}{m}} \ldots e^{-\frac{i(n-1)\pi}{m}}$$

$$= 2\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{m} + \cos\frac{(n-3)\pi}{m} + \ldots + \cos\frac{\pi}{m}\right),$$

et par conséquent

$$n_m = 2\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{m} - \cos\frac{2(n-1)\pi}{m} \ldots - \cos\frac{(m-1)(n-1)\pi}{m}\right]$$

$$+ 2\left[\cos\frac{(n-3)\pi}{m} - \cos\frac{2(n-3)\pi}{m} \ldots - \cos\frac{(m-1)(n-3)\pi}{m}\right]$$

. . . . . .

. . . . . .

$$+ 2\left[\cos\frac{\pi}{m} - \cos\frac{2\pi}{m} \ldots - \cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right].$$

Mais si l'on pose $\frac{2t+1}{m}\pi = q$, t étant un nombre entier, on aura dans le cas de $\cos\frac{q}{2} \gtrless 0$

$$s = 2[\cos q - \cos 2q \ldots - \cos(m-1)q]$$

$$= \frac{2\sin\frac{mq}{2}\sin\frac{m-1}{2}q}{\cos\frac{q}{2}} = 2.$$

Mais $\cos\frac{q}{2}$ est différent de zéro, si $(2t+1)$ n'est pas un multiple de m. Dans le cas contraire $\frac{2t+1}{m}$ est un nombre entier et impair, m étant un tel nombre, et par suite $\cos q = -1$,

$$s = -2(m-1).$$

Il en résulte que

$$n_m = 2\left(\frac{n}{2} - r\right) - 2(m-1)r = n - 2mr.$$

NOTE 2. Tout le procédé de Lorenz repose sur une hypothèse qui n'est pas démontrée et ne peut donner qu'un résultat incertain, puisqu'on ne connaît pas les limites des termes négligés.

De l'équation

$$\varphi(p_1) - \varphi(p) = 1$$

Lorenz déduit, par exemple, au moyen de la série de Taylor, l'équation

$$\varphi'(p)(p_1 - p) = 1,$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur par rapport à $p_1 - p$. Mais on ne sait pas si les termes négligés ne sont pas très grands en comparaison du terme conservé 1.

NOTE 3. Si l'on pose $\varphi(p) = \int_0^p \frac{dx}{lx}$ on aura

$$\varphi(p^2) - \varphi(p) = \int_p^{p^2} \frac{dx}{lx} = \frac{p^2}{2lp} - \frac{p}{lp} - \int_p^{p^2} \frac{dx}{(lx)^2}.$$

En négligeant les deux derniers termes, qui sont petits en comparaison du terme $\frac{p^2}{2lp}$, on obtiendra l'expression du texte. On reconnaît facilement que l'équation différentielle est satisfaite, si l'on pose en même temps

$$\varphi(p^2) - \varphi(p) = \frac{p^2}{2l(p)}$$

et

$$\varphi'(p) = \frac{1}{l(p)}.$$

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LES NOMBRES DE NOMBRES PREMIERS.

RECHERCHES ANALYTIQUES SUR LES NOMBRES DE NOMBRES PREMIERS.

VIDENSKABERNES SELSKABS SKR. V (SÉRIE 6), 1891, P. 427–450.

Dans le mémoire célèbre „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“ *, Riemann s'est servi comme point de départ de l'équation d'Euler **

$$\Sigma n^r \Pi(1-p^r) = 1, \tag{1}$$

où la somme Σ porte sur tous les nombres entiers n, et le produit Π sur tous les nombres premiers.

De ce point de départ l'analyse ne mène pas à la détermination directe de la fonction $\theta(x)$, qui exprime le nombre des nombres premiers inférieurs à x (x inclus), mais plutôt à une autre fonction $\vartheta(x)$, que M. le Dr. J.-P. Gram a appelée *le nombre des puissances divisées des nombres premiers* ***, et qui est définie par l'équation

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \tfrac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots. \tag{2}$$

C'est cette fonction que Riemann a cherché à déterminer sous forme analytique. Riemann a de plus démontré qu'on peut, en partant de cette fonction, retrouver la fonction $\theta(x)$; mais il faut pourtant remarquer que toujours, pour représenter analytiquement $\vartheta(x)$, on devra,

---

* Monatsberichte d. K. Akad. d. W. zu Berlin 3 nov. 1859, p. 671.

** Euler: Introductio in Analysin Infinitorum, t. 1, p. 237, 1748.

*** Videnskabernes Selsk. Skr. II (série 6), p. 8.

selon toute apparence, contrairement à la détermination théoriquement exacte, partir de la limite (infinie) supérieure de la série des nombres et puis se servir d'un calcul approché pour les valeurs de x extrêmement grandes, ce qui exclut la détermination de $\vartheta(x)$ pour les nombres petits et aussi la détermination de $\theta(x)$ au moyen de $\vartheta(x)$. Cette dernière fonction peut toutefois, aussi bien que le nombre même des nombres premiers, être représentée au moyen de tableaux que l'on forme en se fondant sur les dénombrements de nombres premiers; c'est pourquoi il suffit, en fait, de déterminer $\vartheta(x)$.

Bien qu'on ne puisse pas accepter la démonstration de la formule de $\vartheta(x)$, telle que Riemann l'a présentée, le travail de Riemann a fait ressortir ce résultat final, que l'expression de la partie apériodique de $\vartheta(x)$, le logarithme intégral $\mathrm{Li}(x)$, est en pratique parfaitement suffisante, au moins entre les limites entre lesquelles est connu jusqu'ici le nombre des nombres premiers, et de beaucoup supérieure à toutes les formules développées antérieurement à la suite de recherches empiriques.

C'est ce fait que Glaischer* principalement a établi pour chaque intervalle de 50000 nombres jusqu'à 9 millions et pour 10 et 100 millions d'après les nombres de nombres premiers calculés par Meissel**. Les écarts sont représentés graphiquement et, pour la formule de Riemann, le diagramme indique une répartition uniforme des écarts négatif et des écarts positifs. *En ce*

---

* James Glaischer: Factor tables for the sixth Million. London 1883.

** Meissel a plus tard (Math. Ann., tome 15, p. 251) calculé le nombre des nombres premiers jusqu'à 1000 millions. Son résultat (50847478) ne dépasse que de 23 unités le résultat de Gram, calculé au moyen de la formule de Riemann.

qui concerne les nombres plus grands, ces écarts semblent se développer successivement en de longues périodes, de plus en plus régulières.

D'après cela, la marche naturelle pour la recherche analytique des nombres de nombres premiers sera de choisir le même point de départ que Riemann, à savoir la formule d'Euler (1), parce qu'elle mène immédiatement à la détermination de $\vartheta(x)$, dans laquelle la forme de la partie apériodique s'est montrée simple en pratique; de chercher à déterminer analytiquement cette partie apériodique avec une exactitude aussi grande que possible; puis de chercher à déterminer la partie périodique de $\vartheta(x)$ par un développement en série, de manière à faire apparaître en premier lieu les termes qui sont de l'ordre le plus élevé par rapport à x, pour faire ressortir analytiquement de cette manière, s'il est possible, les longues périodes mentionnées ci-dessus qui apparaissent pour les nombres très grands. C'est cette marche que j'ai suivie dans mes recherches.

Nous commencerons par une série de la forme

$$(2^r + 3^r + 4^r \ldots)^s = \alpha^s(2)\,2^r + \alpha^s(3)\,3^r + \ldots + \alpha^s(x)\,x^r \ldots \quad (3),$$

où r est une quantité arbitraire, s un nombre entier et $\alpha^s(x)$ un coefficient qui indique le nombre des manières différentes suivant lesquelles x peut être formé par multiplication de s nombres entiers, le nombre 1 non compris.

Si nous posons de plus

$$A^s(x) = \alpha^s(2) + \alpha^s(3) + \ldots + \alpha^s(x), \qquad (4)$$

$\alpha^s(x)$ étant le dernier terme de la série (3), on aura

$$A^s(x) - A^s(x-1) = \alpha^s(x). \tag{5}$$

Si l'on prend le logarithme des deux membres de l'équation identique (1), et si l'on emploie le développement en série de $\log(1+y)$ suivant les puissances croissantes de y, sans tenir compte de la convergence de la série, on obtiendra de nouveau des développements identiques* qui, pour $r = 0$, font ressortir l'équation bien connue

$$\vartheta(x) = \frac{A^1(x)}{1} - \frac{A^2(x)}{2} + \frac{A^3(x)}{3} \ldots \tag{6}$$

Cette série est finie; car tous les premiers coefficients α^s jusqu'à $\alpha^s(2^s)$ s'évanouissent, et par conséquent $A^s(x)$ s'évanouira d'après (4) pour $x < 2^s$ ou $s > \frac{\log x}{\log 2}$. Nous remplacerons les quantités $A^s(x)$ par d'autres quantités $B^s(x)$, qui se prêtent mieux au calcul suivant; pour les définir, nous modifierons légèrement la série (3) en posant

$$(\tfrac{1}{2} + 2^r + 3^r + 4^r \ldots)^s = \beta^s(1) + \beta^s(2)\,2^r + \beta^s(3)\,3^r + \ldots + \beta^s(x)\,x^r + \ldots \tag{7}$$

et

$$B^s(x) = \beta^s(1) + \beta^s(2) + \ldots + \beta^s(x). \tag{8}$$

Les coefficients $\beta^s(x)$ seront de même les expressions des nombres de manières différentes suivant lesquelles x peut être formé par multiplication de s nombres entiers: mais à présent le nombre 1 est compris parmi les s facteurs, seulement on ne prend que *la moitié* du nombre des décompositions où figure le facteur 1.

---

* Cfr. les remarques de J. Petersen sur le mémoire de Gram. Vid. Selsk. Overs. 1884, p. 14.

On aura alors

$$A^s(x) = B^s(x) - \frac{s}{2} B^{s-1}(x) + \frac{s(s-1)}{2 \cdot 4} B^{s-2}(x) + \ldots$$

$$+ (-1)^{s-1} \frac{s}{2^{s-1}} B^1(x) + \left(-\frac{1}{2}\right)^s, * \qquad (9)$$ * NOTE 1.

et on peut remplacer (6) par une série de la forme

$$\vartheta(x) = -a_0 + \frac{a_1 B^1(x)}{1} - \frac{a_2 B^2(x)}{2} + \ldots \pm a_{s_1} \frac{B^{s_1}(x)}{s_1}, \quad s_1 > \frac{\log x}{\log 2} - 1, \qquad (10)$$

où les coefficients a sont déterminés par

$$a_p = 1 + \frac{p}{2} + \frac{p(p+1)}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(s_1-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2s_1 - 2p)}, \quad p > 0, \qquad (11)$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{s_1} \cdot \frac{1}{2^{s_1}}. \qquad (12)$$

On peut remarquer que le nombre s_1 peut être choisi arbitrairement pourvu, qu'il dépasse $\frac{\log x}{\log 2}$ et peut être pris égal à ∞, valeur à laquelle correspond $a_p = 2^p$, $a_0 = \log 2$.

Mais si l'on ne considère séparement qu'une partie des fonctions $\vartheta(x)$ et $B^s(x)$, il va sans dire qu'il n'est permis de poser $x = \infty$ que si la série correspondante pour cette valeur de s_1 devient convergente.

Comme fondement de mes recherches j'ai choisi la formule de sommation de Poisson, d'après laquelle on a exactement

$$\frac{1}{2} + 2^r + 3^r + \ldots + x^r = \int_1^{x+\frac{1}{2}} dx_1 x_1^r (1 + 2 \Sigma \cos 2\pi m_1 x_1), \quad m_1 = 1, 2 \ldots \infty. \qquad (13)$$

Si les limites sont choisies d'une manière convenable, on peut en outre exprimer la puissance s-ième de cette

série par un intégrale s-uple

$$\int dx_1 x_1^r (1 + 2\Sigma \cos 2\pi m_1 x_1) \int dx_2 x_2^r (1 + 2\Sigma \cos 2\pi m_2 x_2) \ldots$$
$$\int dx_s x_s^r (1 + 2\Sigma \cos 2\pi m_s x_s),$$

où m_1, m_2, ..., m_s parcourent chacun séparément les valeurs 1, 2 .... ∞.

Ici s'introduisent les variables nouvelles

$$u_1 = x_1 x_2 \ldots x_s, \quad u_2 = x_2 x_3 \ldots x_s, \quad u_{s-1} = x_{s-1} x_s, \quad u_s = x_s.$$

Comme la limite inférieure de toutes les variables x est l'unité, ce sera aussi la limite inférieure des variables nouvelles. La limite supérieure de $u_s = \frac{u_{s-1}}{x_{s-1}}$ est u_{s-1}; de même, celle de u_{s-1} sera u_{s-2} et ainsi de suite, jusqu'à u_1, dont la limite supérieure sera désignée par u. De plus, nous aurons

$$dx_s = du_s, \quad dx_{s-1} = \frac{du_{s-1}}{u_s}, \quad dx_{s-2} = \frac{du_{s-2}}{u_{s-1}} \ldots dx_1 = \frac{du_1}{u_2}.$$

De cette manière on peut représenter l'expression (7) par une intégrale s-uple, et l'on verra qu'on peut arrêter le développement à $B^s(x)x^r$, pris comme dernier
NOTE 2. terme, en posant la limite $u = x + \frac{1}{2}$.

Si l'on fait ensuite $r = 0$, on obtiendra

$$B^s(x) = \int_1^u du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} \ldots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_s} \left(1 + 2\Sigma \cos \mu_1 \frac{u_1}{u_2}\right) \ldots$$
$$\left(1 + 2\Sigma \cos \mu_{s-1} \frac{u_{s-1}}{u_s}\right)(1 + 2\Sigma \cos \mu_s u_s), \qquad (14)$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$2\pi m_1 = \mu_1, \quad 2\pi m_2 = \mu_2, \ldots, 2\pi m_s = \mu_s.$$

De même que tous les éléments de l'intégrale simple (13) s'évanouissent, si x_1 n'est pas un nombre entier, de même tous les éléments de cette intégrale multiple s'évanouiront, à moins que toutes les fractions

$$\frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{u_2}{u_3} \cdots \frac{u_{s-1}}{u_s}, \quad \frac{u_s}{1}$$

soient en même temps des nombres entiers.

Si l'on effectue la multiplication de tous les facteurs entre parenthèses, les termes du produit pourront être ordonnés d'après le nombre des signes de sommation qui y entrent et l'on peut démontrer que toutes les intégrales qui contiennent le même nombre de signes de sommation sont égales. En effet, si f, g, h désignent des fonctions arbitraires, on peut démontrer l'identité

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} f\left(\frac{u_{p-1}}{u_p}\right) \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}\right) h(u_{p+1})$$
$$= \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g\left(\frac{u_{p-1}}{u_p}\right) \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} f\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}\right) h(u_{p+1}), \qquad (15)$$

dont les deux membres ne diffèrent que par la permutation de f avec g. Le premier se transforme en

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} f\left(\frac{u_{p-1}}{u_p}\right) \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g(u_{p+1}) h\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}\right)$$

si l'on remplace u_{p+1} par $\frac{u_p}{u_{p+1}}$. Si l'on introduit la notation

$$\psi(u, u_{p+1}) = \int \frac{du}{u} f\left(\frac{u_{p-1}}{u}\right) h\left(\frac{u}{u_{p+1}}\right)$$

l'intégrale ci-dessus peut être exprimée par

$$\int_1^{u_{p-1}} du_p \left[\frac{d}{du_p} \left(\int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g(u_{p+1}) \psi(u_p, u_{p+1}) \right) - \frac{1}{u_p} g(u_p) \psi(u_p, u_p) \right]$$

$$= \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g(u_{p+1}) \psi(u_{p-1}, u_{p+1}) - \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g(u_p) \psi(u_p, u_p),$$

où u_{p+1} peut dans la première intégrale être remplacé par u_p. Les deux intégrales peuvent ensuite être réunies en une seule

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g(u_p) (\psi(u_{p-1}, u_p) - \psi(u_p, u_p))$$

$$= \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g(u_p) \int_{u_p}^{u_{p-1}} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} f\left(\frac{u_{p-1}}{u_{p+1}}\right) h\left(\frac{u_{p+1}}{u_p}\right),$$

et si l'on y remplace u_p par $\frac{u_{p-1}}{u_p}$, puis u_{p+1} par $\frac{u_{p-1}}{u_p} u_{p+1}$, l'expression sera identique au second membre de l'identité (15), qui se trouve par là démontrée.

Si nous revenons maintenant au produit en question et si nous considérons séparément l'intégrale qui contient $\Sigma' \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}}$, mais non $\Sigma' \cos \mu_{p-1} \frac{u_{p-1}}{u_p}$, nous pourrons poser

$$\ldots \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} \Sigma' \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \ldots$$

$$= \ldots \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} \Sigma' \cos \mu_{p-1} \frac{u_{p-1}}{u_p} \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} \ldots$$

De cette manière on peut transporter toutes les sommes Σ' de droite à gauche en faisant un changement correspondant des indices, par où toutes les intégrales pour lesquelles le nombre des sommes est le même deviendront identiques.* * NOTE 3.

Les intégrales qui contiennent p signes de sommation prendront donc la forme

$$\int_1^u du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} 2\Sigma' \cos\mu_1 \frac{u_1}{u_2} \cdots \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2\Sigma' \cos\mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \int_1^{u_{p+1}} \frac{du_{p+2}}{u_{p+2}} \cdots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_s}.$$

Si l'on désigne cette expression par X_p^s et si l'on calcule les dernières intégrales, on obtiendra, pour $p < s$,

$$X_p^s = \int_1^u du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} 2\Sigma' \cos\mu_1 \frac{u_1}{u_2} \cdots \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2\Sigma' \cos\mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \cdot \frac{(\log u_{p+1})^{s-p-1}}{(s-p-1)!}. \quad (16)$$

Si l'on a $p = s$, on pose $\int_1^u du_1 = u \int_1^u \frac{du_1}{u_1} \cdot \frac{u_1}{u}$; puis on peut permuter $\frac{u_1}{u}$ et le signe de sommation suivant en changeant les indices et ainsi de suite. La dernière intégrale deviendra

$$\int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_{s-1}} 2\Sigma' \cos\mu_s u_s = 2\Sigma' \frac{\sin\mu_s u_{s-1}}{\mu_s u_{s-1}},$$

et l'expression totale prendra la forme

$$X_s^s = u \int_1^u \frac{du_1}{u_1} 2\Sigma \cos\mu_1 \frac{u}{u_1} \cdots \int_1^{u_{s-2}} \frac{du_{s-1}}{u_{s-1}} 2\Sigma' \cos\mu_{s-1} \frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} \cdot 2\Sigma' \frac{\sin\mu_s u_{s-1}}{\mu_s u_{s-1}}. \quad (17)$$

Si l'on porte ces valeurs de X_p^s et X_s^s dans l'équation (14), elle prendra la forme

$$B^s(x) = X_0^s + \frac{s}{1} X_1^s + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} X_2^s + \ldots \frac{s}{1} X_{s-1}^s + X_s^s. \quad (18)$$

Ici se présente tout d'abord le problême de déterminer la partie apériodique de $B^s(x)$, que je désignerai par $\overline{B}^s(x)$ en employant, comme dans tout ce qui suit, un trait horizontal au dessus du signe fonctionnel pour représenter la partie apériodique de la fonction.

La dernière intégrale qui figure dans (16) est

$$\int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \cdot \frac{(\log u_{p+1})^{s-p-1}}{(s-p-1)!}$$

$$= \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p u_{p+1} \frac{(\log u_p - \log u_{p+1})^{s-p-1}}{(s-p-1)!}.$$

Si l'on décompose la dernière intégrale en les deux suivantes

$$\int_1^{\infty} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p u_{p+1} \frac{(\log u_p - \log u_{p+1})^{s-p-1}}{(s-p-1)!}$$

$$- \int_{u_p}^{\infty} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p u_{p+1} \frac{(\log u_p - \log u_{p+1})^{s-p-1}}{(s-p-1)!},$$

la première peut être considérée comme la partie apériodique, la seconde comme la partie périodique de l'intégrale. La première peut être mise sous la forme

$$C_0 \frac{(\log u_p)^{s-p-1}}{(s-p-1)!} + C_1 \frac{(\log u_p)^{s-p-2}}{(s-p-2)!} + C_2 \frac{(\log u_p)^{s-p-3}}{(s-p-3)!} + \ldots,$$

où les constantes C_n sont définies par l'équation

$$C_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_1^\infty \frac{du}{u}(\log u)^n\, 2\,\Sigma' \cos\mu u\,;* \qquad (19)$$ * NOTE 4.

on trouvera ainsi

$$\begin{aligned} C_0 &= 0{,}07721\ldots \\ C_1 &= 0{,}07281\ldots \\ C_2 &= -0{,}00484\ldots \\ C_3 &= -0{,}00034\ldots \\ C_4 &= 0{,}00009\ldots \end{aligned}$$

Si de plus, l'on pose, pour abréger,

$$C_0\frac{\partial}{\partial(\log u)} + C_1\frac{\partial^2}{(\partial\log u)^2} + C_2\frac{\partial^3}{(\partial\log u)^3} + \ldots = \Delta_{\log u}, \qquad (20)$$

la partie apériodique de la dernière intégrale de (16) prend la forme

$$\Delta_{\log u_p}\frac{(\log u_p)^{s-p}}{(s-p)!}.$$

Cette expression étant portée dans (16), la dernière intégrale peut s'écrire

$$\int_1^{u_{p-1}}\frac{du_p}{u_p}\,2\,\Sigma\cos\mu_{p-1}\frac{u_{p-1}}{u_p}\cdot\Delta_{\log u_p}\frac{(\log u_p)^{s-p}}{(s-p)!}$$

$$= \int_1^{u_{p-1}}\frac{du_p}{u_p}\,2\,\Sigma\cos\mu_{p-1}u^p\cdot\Delta_{\log u_{p-1}}\frac{(\log u_{p-1}-\log u_p)^{s-p}}{(s-p)!},$$

d'où l'on conclut comme ci-dessus que la partie apériodique est déterminée par

$$\Delta_{\log u_{p-1}}\Delta_{\log u_{p-1}}\frac{(\log u_{p-1})^{s-p+1}}{(s-p+1)!} = \Delta^2_{\log u_{p-1}}\frac{(\log u_{p-1})^{s-p+1}}{(s-p+1)!}.$$

De cette manière on reconnaît facilement que la partie apériodique de (16) peut être exprimée par

$$\bar{X}_p^s = \int_1^u du_1 \, \Delta_{\log u_1}^p \frac{(\log u_1)^{s-1}}{(s-1)!}. \tag{21}$$

En conséquence, la partie apériodique totale de (18) peut se mettre sous les formes symboliques

$$\bar{B}_{(x)}^s = \int_1^u du_1 (1 + \Delta_{\log u_1})^s \frac{(\log u_1)^{s-1}}{(s-1)!} = \int_0^{\log u} dv \, e^v (1 + \Delta_v)^s \frac{v^{s-1}}{(s-1)!}. \tag{22}$$

Tant que nous nous trouvions entre les limites de x qu'on a atteintes jusqu'ici par le dénombrement ou le calcul exact du nombre des nombres premiers, limites qui correspondent respectivement à $\log x = 16$ et $\log x = 21$, les difficultés pour la détermination de la partie apériodique de $\vartheta(x)$, si l'on porte les valeurs trouvées de $\bar{B}_{(x)}^s$ dans l'équation (10), ne seront pas insurmontables, s_1 étant le plus grand nombre entier inférieur à $\frac{\log x}{\log 2}$. Le résultat ne peut guère être mis sous une forme notablement plus simple, si l'on veut tenir compte de toutes les constantes C_n qui entrent dans Δ_v; mais si l'on ne tient compte que de la première C_0, la série sera convergente pour $s_1 = \infty$, et la sommation pourra facilement être effectuée. On aura évidemment pour $s_1 = \infty$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0 \ldots$

$$\bar{\vartheta}(x) = -\log 2 + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} 2^s \int_0^{\log u} dv \, e^v \left(1 + C_0 \frac{d}{dv}\right)^s \frac{v^{s-1}}{s!}$$

$$= -\log 2 + \int_0^{\log u} dv \, e^v \left[\frac{1}{v} - \frac{e^{-2v}}{v} + \frac{2C_0}{1!} \frac{d}{dv}\left(v \cdot \frac{e^{-2v}}{v}\right) - \frac{2^2 C_0^2}{2!} \frac{d^2}{dv^2}\left(v^2 \frac{e^{-2v}}{v}\right) + \ldots\right],$$

et, si l'on effectue la sommation au moyen de la série de Lagrange*, on aura

* NOTE 5.

$$\left.\begin{aligned}\overline{\vartheta}(x) &= -\log 2 + \int_0^{\log u} dv\, e^v \left(\frac{1}{v} - \frac{e^{-\frac{2v}{1+2C_0}}}{v}\right) \\ &= -\log 2 + Li(u) - Li\left(u^{-\frac{1-2C_0}{1+2C_0}}\right).\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Ici on a $\frac{1-2C_0}{1+2C_0} = 0{,}73245\ldots$, ce qui fait ressortir que l'expression trouvée, pour les valeurs de x très grandes, ne diffère pas essentiellement du logarithme intégral de x et qu'on pourrait même poser $C_0 = 0$, ce qui n'aurait pas sensiblement modifié la valeur de $\overline{\vartheta}(x)$. Dans ce cas, le résultat prendra la forme simple

$$\overline{\vartheta}(x) = -\log 2 + \int_{-\log u}^{+\log u} \frac{dv}{v} e^v.$$

En pratique ces résultats sont donc en bonne concordance avec ceux de Riemann.

La partie périodique de X_p^s, $p < s$, n'a que peu d'importance en comparaison de X_s^s, et, de plus, comme la première peut être déduite de la dernière, je me bornerai dans ce qui suit à la discussion de la seule fonction X_s^s qui est définie par l'équation (17).

Nous commencerons par considérer le cas $s = 2$, à savoir

$$X_2^2 = u \int_1^u \frac{du_1}{u_1} 2\Sigma \cos\mu_1 \frac{u}{u_1} \cdot 2\Sigma \frac{\sin\mu_2 u_1}{\mu_2 u_1}.$$

L'intégration par parties transforme X_2^2 en

$$X_2^2 = \int_1^u du_1\, 2\Sigma \frac{\sin\mu_1 \frac{u}{u_1}}{\mu_1} \cdot 2\Sigma \cos\mu_2 u_1$$

$$= 2\Sigma\Sigma \int_1^u \frac{du_1}{\mu_1}\left(\sin\left(\mu_1 \frac{u}{u_1} + \mu_2 u_1\right) + \sin\left(\mu_1 \frac{u}{u_1} - \mu_2 u_1\right)\right)$$

On pose ici

$$\mu_1 \frac{u}{u_1} + \mu_2 u_1 = 2v\sqrt{\mu_1\mu_2 u}, \quad \mu_1 \frac{u}{u_1} - \mu_2 u_1 = 2v'\sqrt{\mu_1\mu_2 u},$$

$$u_1 \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 u}} = v \pm \sqrt{v^2-1} = -v' + \sqrt{v'^2+1}.$$

v a un minimum pour $v = 1$, et la condition pour que cette valeur se trouve entre les limites de l'intégrale est

$$1 < \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} < u,$$

condition qu'on peut encore exprimer en disant que μ_1 et μ_2 doivent tous les deux être plus petits que $\sqrt{\mu_1\mu_2 u}$. u_1 étant croissant, le radical $\sqrt{v^2-1}$ passe, lors du minimum, du négatif au positif. Si le minimum a lieu pour une valeur moindre que la limite inférieure de l'intégrale ($\mu_1 u < \mu_2$) le signe à prendre entre les limites de l'intégrale est le signe *plus*; c'est, au contraire le signe *moins*, si la valeur qui donne lieu au minimum est plus grande que la limite supérieure de l'intégrale ($\mu_1 > \mu_2 u$).

Si l'on pose pour abréger

$$2\sqrt{\mu_1\mu_2 u} = a, \quad \mu_1 u + \mu_2 = a v_0, \quad \mu_1 + \mu_2 u = a v_1,$$
$$\mu_1 u - \mu_2 = a v'_0, \quad \mu_1 - \mu_2 u = a v'_1,$$

on obtiendra de cette manière

$$X_2^2 = \Sigma\Sigma \frac{4u}{a}\left[\int_{v_0}^{v_1} dv \left(1 \pm \frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right) \sin av \right.$$
$$\left. + \int_{v_0'}^{v_1'} dv' \left(-1 + \frac{v'}{\sqrt{v'^2+1}}\right) \sin av'\right]$$

Ici l'on a

$$\Sigma\Sigma\frac{4u}{a}\left(\int_{v_0}^{v_1}dv\sin av-\int_{v_0'}^{v_1'}dv'\sin av'\right)$$
$$=2\Sigma\Sigma\frac{\sin\mu_1\sin\mu_2 u-\sin\mu_1 u\sin\mu_2}{\mu_1\mu_2},$$

expression qui s'évanouit, les deux termes devenant identiques si l'on permute les indices.

L'expression est donc réduite à

$$X_2^2=\Sigma\Sigma\frac{4u}{a}\left[\int_{v_0}^{v_1}dv\left(\pm\frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right)\sin av+\int_{v_0'}^{v_1'}dv'\frac{v'}{\sqrt{v'^2+1}}\sin av'\right],$$

le double signe étant déterminé de la manière indiquée ci-dessus.

Nous considérerons d'abord l'intégrale

$$\int\frac{dz\cdot z}{\sqrt{z^2-1}}e^{azi}$$

relative à la variable complexe $z=v+wi$. Si l'intégrale est prise le long d'une courbe fermée, cette intégrale s'évanouira; si donc on intègre le long d'un rectangle dont les sommets sont situés en 1, v_0, $v_0+\infty i$, $1+\infty i$, on trouvera

$$0=\int_1^{v_0}\frac{dv\cdot v}{\sqrt{v^2-1}}e^{vai}+i\int_0^{\infty}\frac{dw\cdot(v_0+wi)}{\sqrt{(v_0+wi)^2-1}}e^{a(v_0+wi)i}$$
$$-i\int_0^{\infty}\frac{dw(1+wi)}{\sqrt{(1+wi)^2-1}}e^{a(1+wi)i}.$$

Les deux derniers termes peuvent être développés en séries semiconvergentes; mais, pour abréger les calculs, nous ne conserverons que les termes qui ne s'évanoui-

ront pas dans le résultat final, l'expression de X_2^2, pour $u = \infty$, et nous procéderons de la même manière dans ce qui suit. En conséquence, nous obtiendrons

$$0 = \int_1^{v_0} \frac{dv \cdot v}{\sqrt{v^2-1}} e^{avi} + \frac{i v_0 e^{av_0 i}}{a\sqrt{v_0^2-1}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\left(a+\frac{\pi}{4}\right)i},$$

et par suite

$$\int_0^{v_0} \frac{dv \cdot v}{\sqrt{v^2-1}} \sin av = -\frac{v_0 \cos a v_0}{a\sqrt{v_0^2-1}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right).$$

Ici v_0 est supposé plus grand que 1. Dans le cas de $v_0 = 1$, il va sans dire que l'intégrale s'évanouira. Une équation analogue peut être obtenue en remplaçant v_0
* NOTE 6. par v_1.*

Si la valeur qui donne le minimum est comprise entre les limites de l'intégrale, on aura

$$1 < \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} < u,$$

$$a\sqrt{v_0^2-1} = \mu_1 u - \mu_2 = a v_0',$$

$$a\sqrt{v_1^2-1} = \mu_2 u - \mu_1 = -a v_1',$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv\left(\pm\frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right)\sin av = -\int_{v_0}^{1} \frac{dv \cdot v}{\sqrt{v^2-1}} \sin av + \int_1^{v_1} \frac{dv \cdot v}{\sqrt{v^2-1}} \sin av.$$

Donc on aura, d'après l'équation trouvée ci-dessus, dans ce cas

$$\int_{v_0}^{v_1} dv\left(\pm\frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right)\sin av$$

$$= -\frac{v_0 \cos a v_0}{a v_0'} + \frac{v_1 \cos a v_1}{a v_1'} + \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right),$$

tandis que l'intégrale se transformera pour $v_0 = 1$ en

$$\frac{v_1 \cos av_1}{av'_1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right),$$

et pour $v_1 = 1$ en

$$-\frac{v_0 \cos av_0}{av'_0} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$$

Si la valeur qui donne le minimum est moindre que la limite inférieure, on aura

$$\mu_1 u < \mu_2, \quad \sqrt{v_0^2 - 1} = -v'_0, \quad \sqrt{v_1^2 - 1} = -v'_1,$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv \left(\pm \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}}\right) \sin av = -\frac{v_0 \cos av_0}{av'_0} + \frac{v_1 \cos av_1}{av'_1},$$

et, si cette valeur est plus grande que la limite supérieure de l'intégrale, on obtiendra

$$\mu_1 > \mu_2 u, \quad \sqrt{v_0^2 - 1} = v'_0, \quad \sqrt{v_1^2 - 1} = v'_1,$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv \left(\pm \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}}\right) \sin av = -\frac{v_0 \cos av_0}{av'_0} + \frac{v_1 \cos av_1}{av'_1}.$$

En remarquant qu'on a en tous cas

$$\int_{v_0'}^{v_1'} \frac{dv \cdot v}{\sqrt{v^2 + 1}} \sin av = \frac{v'_0 \cos av'_0}{av_0} - \frac{v'_1 \cos av'_1}{av_1},$$

on verra que X_2^2 peut être exprimé par

$$X_2^2 = S_1 \frac{4u}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} S_2 \frac{4u}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$+ S_3 \frac{4u}{a^2}\left[-\frac{v_0 \cos av_0}{v'_0} + \frac{v_1 \cos av_1}{v'_1} + \frac{v'_0 \cos av'_0}{v_0} - \frac{v'_1 \cos av'_1}{v_1}\right],$$

où S_1, S_2 et S_3 désignent trois sommes doubles par rapport à m_1 et m_2, telles que le produit $m_1 m_2$ parcourt dans S_1 et S_2 la série entière des nombres de 1 jusqu'à ∞, tandis que chaque facteur m_1 ou m_2 ne parcourt dans S_1 que la suite des nombres plus petits que $\sqrt{m_1 m_2 u}$, et dans S_2 la suite qui correspond précisément à $m_1 = \sqrt{m_1 m_2 u}$ et $m_2 = \sqrt{m_1 m_2 u}$. Dans la somme double S_3, m_1 et m_2 parcourent tous nombres entiers de 1 jusqu'à ∞ à l'exception des valeurs correspondanses soit à $m_1 = \sqrt{m_1 m_3 u}$,
* NOTE 7. soit à $m_2 = \sqrt{m_1 m_2 u}$.*

La dernière somme double se décompose, si l'on y porte les valeurs données de a, v_0, v_1, v'_0, v'_1, en les deux sommes

$$S_3 \frac{1}{\mu_1 \mu_2}\left(-\frac{\mu_1 u + \mu_2}{\mu_1 u - \mu_2}\cos(\mu_1 u + \mu_2) + \frac{\mu_1 u - \mu_2}{\mu_1 u + \mu_2}\cos(\mu_1 u - \mu_2)\right)$$
$$+ S_3 \frac{1}{\mu_1 \mu_2}\left(\frac{\mu_1 + \mu_2 u}{\mu_1 - \mu_2 u}\cos(\mu_1 + \mu_2 u) - \frac{\mu_1 - \mu_2 u}{\mu_1 + \mu_2 u}\cos(\mu_1 - \mu_2 u)\right),$$

qui sont égales, comme on le reconnaît en permutant les indices. Si l'on pose ici $\mu_1 = 2\pi m_1$, $\mu_2 = 2\pi m_2$, $u = x + \frac{1}{2}$, la somme totale des deux sommes se réduira à

$$-S_3 \frac{(-1)^{m_1}}{\pi^2 m_1}\left(\frac{1}{m_1(x+\frac{1}{2}) - m_2} + \frac{1}{m_1(x+\frac{1}{2}) + m_2}\right).$$

Dans cette somme double on doit, d'après la condition de la sommation, négliger les termes qui correspondent à $m_1(x+\frac{1}{2}) - m_2 = 0$; grâce à cette condition, la sommation peut facilement être exécutée. De cette manière la somme double ci-dessus se réduit à

$$\frac{1}{\pi^2(x+\frac{1}{2})} \sum_{m_1=1}^{m_1=\infty}{}' \frac{(-1)^{m_1}}{m_1^2} = -\frac{1}{12(x+\frac{1}{2})}.$$

En conséquence, cette somme double peut être négligée,

si l'on ne tient pas compte des termes qui s'évanouissent pour $x = \infty$. Alors le résultat total peut être exprimé par

$$X_2^2 = \frac{u}{\pi\sqrt{2}} \Sigma\Sigma \frac{\sin\left(4\pi(m_1 m_2 u)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 m_2 u)^{\frac{3}{4}}},$$

et la sommation double doit être exécutée comme il a été dit ci-dessus pour les sommations désignées par S_1 et S_2.

Le résultat trouvé met en évidence que, si l'on néglige les termes qui s'évanouissent pour $n = \infty$, les seuls éléments utiles de l'intégrale qui représentait originairement X_2^2 seront les éléments voisins du point minimum; et, ce théorème étant acquis, le calcul peut être exécuté plus facilement d'une autre manière.

Si l'on désigne la valeur de u_1 au point minimum par v_1, on aura $v_1 = \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}}$, et la condition pour que ce point soit situé entre les limites de l'intégrale sera $1 < v_1 < u$. Si cette condition est remplie, on peut poser, en dehors du point minimum $u_1 = v_1(1 + y)$, et regarder y comme assez petit pour qu'on soit en droit, dans le développement suivant les puissances de y, de négliger les puissances de y supérieures à la seconde. Enfin, l'intégrale peut être prise entre des limites indéterminées $-\omega$ et $+\omega$ (définies avec plus de précision dans mon mémoire Vid. Selsk. Skr., série 6, tome VI, p. 13, Œuvres scientifiques, tome I, p. 422) ou, ce qui ici revient au même, de $-\infty$ à $+\infty$. Si le point minimum se confond avec une limite de l'intégrale, l'une de ces limites de y sera remplacée par 0 et le résultat doit en ce cas être divisé par 2. Si le point minimum est situé en dehors des limites de l'intégrale, le résultat sera 0. De cette manière on obtiendra

$$X_2^2 = 2u\sqrt{\pi}\,\Sigma\Sigma\frac{\sin\left(2\sqrt{\mu_1\mu_2 u}+\frac{\pi}{4}\right)}{(\mu_1\mu_2 u)^{\frac{3}{4}}},$$

les sommations devant être exécutées de manière que $1 < \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} < u$ et devant être divisées par 2 dans les cas où l'on a, soit $1 = \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}}$, soit $u = \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}}$.

Cette expression est précisement identique au résultat trouvé ci-dessus; et, comme nous avons de cette manière démontré la légitimité du procédé, nous en ferons une application au calcul de X_s^s.

L'expression trouvée (17) peut être écrite sous la forme

$$X_s^s = 2u\,\Sigma\Sigma\ldots\int_1^u\frac{du_1}{u_1}\ldots$$

$$\ldots\int_1^{u_{s-2}}\frac{du_{s-1}}{u_{s-1}}\,\frac{1}{\mu_s u_{s-1}}\sin\left(\mu_s u_{s-1}\pm\mu_{s-1}\frac{u_{s-2}}{u_{s-1}}\ldots\pm\mu_1\frac{u}{u_1}\right),$$

où les doubles signes expriment qu'on prend la somme de toutes les expressions correspondantes aux différentes combinaisons de ces signes. Cependant un minimum ou un maximum n'est possible que dans le cas où tous les signes sont positifs et il est alors déterminé par

$$\mu_s u_{s-1} = \mu_{s-1}\frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} = \ldots\mu_1\frac{u}{u_1} = \nu,$$

où

$$\nu = (\mu_s\mu_{s-1}\ldots\mu_1 u)^{\frac{1}{s}}.$$

Les conditions pour que ce point soit situé entre les limites de l'intégrale sont exprimées par

$$\mu_p < \nu \quad \text{pour} \quad p = 1, 2, 3 \ldots s.$$

Si les valeurs des variables $u_1, u_2, \ldots u_{s-1}$ au point minimum sont désignées par $v_1, v_2, \ldots v_{s-1}$, elles seront déterminées par

$$v_1 = \frac{\mu_1 u}{\nu}, \quad v_2 = \frac{\mu_1 \mu_2 u}{\nu^2}, \quad \ldots, \quad v_{s-1} = \frac{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{s-1} u}{\nu^{s-1}} = \frac{\nu}{\mu_s}.$$

Nous introduirons maintenant de nouvelles variables $y_1, y_2 \ldots y_{s-1}$, définies par les équations

$$u_1 = v_1(1+(s-1)y_1), \quad u_2 = v_2(1+(s-2)(y_1+y_2)),$$
$$\ldots, \quad u_{s-1} = v_{s-1}(1+y_1+y_2+\ldots y_{s-1}).$$

Ces variables peuvent être considérées comme assez petites pour être négligées dans les coefficients des fonctions trigonométriques et l'on peut arrêter le développement de l'angle

$$\mu_s u_{s-1} + \mu_{s-1} \frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} + \ldots \mu_1 \frac{u}{u_1}$$

suivant les puissances de y_p aux termes du second degré par rapport à y_p. Dans ce développement*, les coefficients de y_p et de $y_p y_q$ s'évanouiront si p diffère de q, et le résultat se réduira à * NOTE 8.

$$\nu s + \tfrac{1}{2}\nu(s(s-1)y_1^2 + (s-1)(s-2)y_2^2 + \ldots + 2\cdot 1 y_{s-1}^2).$$

Ensuite, si les intégrations par rapport à $y_1, y_2 \ldots y_{s-1}$ sont étendues de $-\infty$ à $+\infty$, on obtiendra

$$X_s^s = 2u(s-1)!\,\Sigma\Sigma \ldots \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \ldots$$
$$\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{s-1} \sin\left(\nu s + \tfrac{1}{2}\nu(s(s-1)y_1^2 + \ldots + 2\cdot 1 y_{s-1}^2)\right)$$
$$= \frac{2u}{\sqrt{s}}\,\Sigma\Sigma \ldots \frac{1}{\nu}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{s-1}{2}} \sin\left(\nu s + (s-1)\frac{\pi}{4}\right).$$

Ici l'on a $\nu = (\mu_1\mu_2 \ldots \mu_s u)^{\frac{1}{s}} = 2\pi(m_1 m_2 \ldots m_s u)^{\frac{1}{s}}$, et par conséquent

$$X_s^s = \frac{u}{\pi\sqrt{s}} \Sigma\Sigma \ldots \frac{\sin\left(2\pi s(m_1 m_2 \ldots m_s u)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 m_2 \ldots m_s u)^{\frac{s+1}{2s}}}. \quad (24)$$

Dans cette sommation s-uple, le produit $m_1 m_2 \ldots m_s$ varie de 1 à ∞; mais chaque facteur pris séparément ne doit pas, d'après la condition $\mu_p < \nu$, excéder la limite $(m_1 m_2 \ldots m_s u)^{\frac{1}{s}}$ et, quand il atteint cette limite, auquel cas le point minimum est confondu avec l'une des limites de la variable u_p, le résultat ne doit être compté que pour moitié.

Si l'on pose $m_1 m_2 \ldots m_s = m$, on pourra transformer la sommation s-uple en une sommation simple, pourvu qu'on multiplie l'expression sur laquelle porte la sommation par un facteur $\gamma_n^s(m)$ qui indique le nombre des décompositions différentes de m en s facteurs, y compris le nombre 1 et sous la condition qu'aucun facteur ne dépasse la limite $n = (mu)^{\frac{1}{s}}$. Dans les cas où cette limite est atteinte, les résultats ne sont comptés que pour moitié. Avec ces notations, l'équation (24) prendra la forme

$$X_s^s = \frac{u}{\pi\sqrt{s}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \gamma_n^s(m) \frac{\sin\left(2\pi s(mu)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(mu)^{\frac{s+1}{2s}}}, \quad (25)$$

$$n = (mu)^{\frac{1}{s}}.$$

La quantité $\gamma_n^s(m)$, définie ci-dessus, peut être déterminée comme coefficient de m^r dans le développement

$$(1 + 2^r + 3^r \ldots + (n-1)^r + \tfrac{1}{2} n^r)^s$$
$$= 1 + \gamma_n^s(2)\, 2^r + \gamma_n^s(3)\, 3^r \ldots + \gamma_n^s(m)\, m^r + \ldots \quad (26)$$

Si dans l'équation (10) on remplace $B^s(x)$ par la valeur de X_s^s trouvée de cette manière, en vue d'obtenir la partie périodique correspondante de $\vartheta(x)$, et si l'on effectue les calculs numériques pour une valeur de x, donnée très grande, et pour des valeurs de m choisies arbitrairement, on reconnaîtra que, pour des valeurs croissantes de s, les termes, après avoir présenté des variations de signe tout à fait irrégulières, se réunissent successivement en groupes de plus en plus grands de même signe et que c'est de la sommation de ces groupes que le résultat dépend essentiellement. On peut facilement mettre en évidence la formation d'un tel groupe.

On pose

$$2s(mu)^{\frac{1}{s}} + \frac{s-1}{4} = \theta_s;$$

alors le terme suivant sera déterminé par le développement

$$\theta_{s+1} = \theta_s + \frac{d\theta_s}{ds} \cdot \frac{1}{1} + \frac{d^2\theta_s}{ds^2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots$$

Si $\frac{d^2\theta_s}{ds^2}$ et les dérivées suivantes sont des quantités très petites et si $\frac{d\theta_s}{ds}$ est un nombre entier impair, positif ou négatif, dans la série (10) où les termes ont des signes alternés, un groupe de ladite espèce se formera autour du terme correspondant à s.

On a ici

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2(mu)^{\frac{1}{s}}\left(1 - \frac{\log mu}{s}\right) + \frac{1}{4},$$

$$\frac{d^2\theta_s}{ds^2} = 2(mu)^{\frac{1}{s}} \frac{(\log mu)^2}{s^3},$$

ou, si l'on pose $\frac{\log mu}{s} = y$,

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2e^y(1-y)+\tfrac{1}{4}, \quad \frac{d^2\theta_s}{ds^2} = 2e^y\frac{y^3}{\log mu}.$$

On doit donc avoir, p étant un entier positif, négatif ou nul,

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2e^y(1-y)+\tfrac{1}{4} = 1-2p.$$

Comme y est nécessairement positif, les valeurs négatives
* NOTE 9. de p ne sont pas admissibles, et l'on trouvera *

$$\begin{aligned} y &= 0{,}83774\ldots, & e^y &= 2{,}31114\ldots \text{ pour } p = 0,\\ y &= 1{,}19011\ldots, & e^y &= 3{,}28746\ldots \text{ pour } p = 1,\\ y &= 1{,}40051\ldots, & e^y &= 4{,}05727\ldots \text{ pour } p = 2,\\ y &= 1{,}55459\ldots, & e^y &= 4{,}73317\ldots \text{ pour } p = 3. \end{aligned}$$

Puis on verra que $\frac{d^2\theta_s}{ds^2}$ et les dérivées suivantes prendront des valeurs très petites, au moins pour les valeurs les plus basses de p, si $\log mu$ est un nombre très grand. Au dessus des limites pratiques ($\log x = 21$) et pour les valeurs inférieures de m, cette condition n'est satisfaite qu'assez approximativement; pourtant, on pourra facilement faire ressortir la formation des groupes correspondants aux valeurs inférieures de p, si x est de l'ordre de grandeur des millions.

Dans ces groupes entrera donc

$$\sin\pi\theta_s = \sin\pi\left(\log mu\cdot\frac{2e^y+\frac{1}{4}}{y}-\frac{1}{4}\right),$$

et, si la fonction périodique est écrite sous la forme

$$\sin\pi\theta_s = \sin 2\pi\left(\frac{\log u}{\lambda}+k_m\right), \tag{27}$$

λ sera déterminé par

$$\lambda = \frac{y}{e^y+\frac{1}{8}}. \tag{28}$$

La partie de $\vartheta(x)$ qui correspond au groupe considéré peut donc être representée par une courbe dont les points d'intersection successifs avec l'axe des abscisses *ont une distance constante* $\frac{1}{2}\lambda$, si $\log u$ ou, ce qui revient au même, $\log x$ est pris pour abscisse.

Aux valeurs indiquées ci-dessus de y correspondent

$$\lambda = 0{,}34388\ldots,\quad 0{,}34875\ldots,\quad 0{,}33487\ldots,\quad 0{,}31999\ldots$$

Toutefois on a dû remarquer que ce sont précisément les grandes valeurs de s, à savoir celles qui sont voisines de $\log mu$, qui produisent les longues périodes de $\vartheta(x)$; mais, à cause de cette circonstance, il faut de nouveau discuter le calcul qui a conduit à l'équation (25). Il faut se rappeler que nous avons étendu la variation des variables y_p à l'infini dans les deux directions, ce qui peut être légitime, à condition que y_p dépasse certaines limites étroites. Mais, si le nombre s des variables et celui des intégrales deviennent si grands qu'on ne puisse pas considérer $u^{\frac{1}{s}}$ comme un grand nombre, ce qui est précisément le cas ici, il n'est plus permis d'étendre à ce point la variation de y_p. La conséquence sera que θ_s, surtout pour les valeurs les plus petites de p, s'approche fort de sa limite inférieure, qui est $2s(mu)^{\frac{1}{s}}$ augmenté d'une constante indépendante de s. Si nous passons à cette limite inférieure elle-même, nous aurons

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2e^y(1-y) = 1-2p,$$

et les valeurs de y calculées par cette équation seront

$$\begin{array}{llll}
y = 0{,}76803\ldots, & e^y = 2{,}15553\ldots & \text{pour } p = 0, \\
y = 1{,}15718\ldots, & e^y = 3{,}18097\ldots & \text{pour } p = 1, \\
y = 1{,}37809\ldots, & e^y = 3{,}96731\ldots & \text{pour } p = 2, \\
y = 1{,}53736\ldots, & e^y = 4{,}65232\ldots & \text{pour } p = 3.
\end{array}$$

La période elle-même peut à présent être déterminée par

$$\lambda = y e^{-y} \tag{29}$$

et aux valeurs calculées de y correspondront respectivement

$$\lambda = 0{,}35631\ldots,\quad 0{,}36378\ldots,\quad 0{,}34736\ldots,\quad 0{,}33045\ldots$$

Les valeurs vraies de λ seront donc comprises entre ces valeurs et celles qu'on a calculées ci-dessus; et, pour les valeurs les plus petites de p, auxquelles correspondent les groupes les plus grands, elles seront certainement plus proches des dernières valeurs. Du reste, les périodes qui correspondent aux valeurs inférieures de p diffèrent tellement peu qu'elles se combineront sur une grande étendue en une seule période qui ne diffère que peu de 0,35.

On peut, en outre, conclure de l'expression (25) que les coefficients des fonctions périodiques trigonométriques ou les amplitudes seront, pour les valeurs les plus grandes de s, et par suite aussi de λ, à peu près du même ordre de grandeur que $x^{\frac{1}{2}}$ et d'un ordre inférieur pour les s et les λ décroissants et par suite pour les périodes courtes. La détermination plus précise de l'amplitude et de la phase des périodes différentes semble pourtant présenter des difficultés très considérables.

Le résultat auquel je suis parvenu par les calculs ci-dessus peut être retrouvé, en ce qu'il a d'essentiel, par un autre procédé, que j'exposerai ici parce qu'il me semble jeter une lumière nouvelle sur la question.

Posons

$$(1+2^r+3^r+\ldots)^s = 1+\gamma^s(2)\,2^r+\ldots+\gamma^s(x)\,x^r+\ldots, \quad (30)$$

$\gamma^s(x)$ désignant le nombre des décompositions différentes de x en un produit de s facteurs, y compris l'unité.

Posons de plus

$$G^s(x) = 1+\gamma^s(2)+\ldots+\gamma^s(x). \quad (31)$$

On peut calculer $\gamma^s(x)$ à l'aide de $\gamma^{s-1}(x)$ en sommant les décompositions qui correspondent au facteur nouveau; on obtient de cette manière

$$\gamma^s(x) = \Sigma\gamma^{s-1}\left(\frac{x}{d}\right),$$

la sommation étant étendue à tous les diviseurs de x. De plus, en se servant du symbole E de Legendre pour représenter le plus grand entier contenu dans une fraction, on a

$$\Sigma\gamma^{s-1}\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{q=1}^{q=x}\left(E\left(\frac{x}{q}\right)-E\left(\frac{x-1}{q}\right)\right)\gamma^{s-1}(q);$$

par où l'on obtiendra

$$\gamma^s(x) = \sum_{q=1}^{q=x}\left(E\left(\frac{x}{q}\right)-E\left(\frac{x-1}{q}\right)\right)\gamma^{s-1}(q), \quad (32)$$

et par suite

$$G^s(x) = \sum_{q=1}^{q=x} E\left(\frac{x}{q}\right)\cdot\gamma^{s-1}(q). \quad (33)$$

Ces expressions peuvent être mises sous forme analytique, grâce aux relations

$$E\left(\frac{x}{q}\right)-E\left(\frac{x-1}{q}\right) = \sum_{m=1}^{m=q}\frac{\cos 2\pi\frac{mx}{q}}{q}, \quad (34)$$

* NOTE 10.

$$E\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{1}{2}=\sum_{m=1}^{m=q}\frac{\sin 2\pi\dfrac{m(x+\frac{1}{2})}{q}}{2q\sin\pi\dfrac{m}{q}},* \tag{35}$$

dont on constate facilement l'exactitude, en effectuant les sommations indiquées.

Nous analyserons avec plus de précision $\gamma^s(x)$ sons la forme qui en résulte, à savoir

$$\left.\begin{aligned}\gamma^s(x)&=\sum_{q=1}^{q=x}\sum_{m=1}^{m=q}\frac{\cos 2\pi\dfrac{mx}{q}}{q}\gamma^{s-1}(q)\\&=\sum_{m=1}^{m=x}\sum_{q=m}^{q=x}\frac{\cos 2\pi\dfrac{mx}{q}}{q}\gamma^{s-1}(q).\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Dans la dernière expression posons

$$q=q_1q_2\cdots q_{s-1};$$

puis la sommation simple par rapport à q est transformée en une sommation $(s-1)$-uple par rapport à $q_1, q_2, \ldots q_{s-1}$, sommation étendue à tous les cas pour lesquels

$$m \leqq q_1q_2\cdots q_{s-1} \leqq x. \tag{37}$$

Comme cette transformation fait disparaître le facteur $\gamma^{s-1}(q)$, on obtiendra

$$\gamma^s(x)=\sum_{m=1}^{m=s}\Sigma\Sigma\ldots\frac{\cos 2\pi\dfrac{mx}{q_1q_2\cdots q_{s-1}}}{q_1q_2\cdots q_{s-1}}, \tag{38}$$

les signes $\Sigma\Sigma\ldots$ indiquant la sommation $(s-1)$-uple, exécutée sons lesdites conditions par rapport aux $(s-1)$ variables $q_1, q_2 \ldots q_{s-1}$.

Nous considérerons d'abord la sommation simple

$$\Sigma' \frac{a_1}{q_1} \cos 2\pi \frac{a_1}{q_1},$$

où q_1 parcourt une longue série de nombres successifs, série qui, du reste, n'est pas déterminée avec plus de précision, et où a_1 est un nombre très grand. On remarquera alors qu'il se formera pour certaines valeurs de q_1 que nous désignerons par q'_1, de part et d'autre du terme correspondant à q'_1, un groupe de termes de même signe. On trouvera qu'il en est ainsi sous les conditions suivantes.

Qu'on fasse $q_1 = q'_1 + y_1$ et qu'on suppose

$$\frac{a_1}{(q'_1 + k_1)^2} = m_1,$$

où k_1 est une fraction proprement dite, m_1 un nombre entier. On pourra alors former le développement

$$\frac{a_1}{q_1} = \frac{a_1}{q'_1 + k_1} - \frac{a_1(y_1 - k_1)}{(q'_1 + k_1)^2} + \frac{a_1(y_1 - k_1)^2}{(q'_1 + k_1)^3} - \ldots,$$

qui, par une élimination partielle de k_1 et q'_1, se transforme en

$$\frac{a_1}{q_1} = 2\sqrt{m_1 a_1} - m_1(y_1 + q'_1) + \frac{m_1^{\frac{3}{2}}(y_1 - k_1)^2}{a_1^{\frac{1}{2}}} - \ldots$$

Ici $m_1(y_1 + q'_1)$ est un nombre entier; et si, de plus, m_1 est en même temps un nombre très petit en comparaison de $a_1^{\frac{1}{3}}$, les conditions pour la formation du groupe considéré seront satisfaites. Si a_1 atteint la limite $a_1 = \infty$ et si m_1 est supposé fini, les termes de chaque groupe particulier peuvent être sommés exactement en remplaçant la sommation par rapport à y_1 par une intégration entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, pourvu que le groupe

ne soit pas un groupe limite, interrompu par une valeur limite donnée de q_1. Le résultat de l'intégration est

$$\frac{a_1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(2\pi \cdot 2(m_1 a_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 a_1)^{\frac{1}{4}}}.$$

La formation du groupe aura encore lieu, si a_1 est fini, mais très grand, tandis que m_1 appartient aux termes inférieurs de la série des nombres, et la somme des termes d'un groupe sera à peu près la même que celle que nous avons trouvée ci-dessus. Mais, à mesure que la grandeur de m_1 approche de $a_1^{\frac{1}{3}}$, le nombre des termes du groupe va décroître, et l'expression de la somme va perdre de son exactitude; puis la formation des groupes cessera complètement. Mais, si m_1 croît ensuite constamment et dépasse la limite $a_1^{\frac{1}{3}}$, on peut inversement considérer chaque terme à la variable q_1 comme produit par la sommation d'un groupe de termes à la variable m_1, groupe dans lequel chaque terme a précisément la forme indiquée plus haut. On peut facilement se convaincre de l'exactitude de cette assertion par un calcul analogue à celui qui a été exécuté ci-dessus*. Par conséquent, si l'on peut négliger les termes pour lesquels m_1 (comme q_1) s'approche de $a_1^{\frac{1}{3}}$, la transformation indiquée de la sommation relative à la variable q_1 en une sommation relative à la variable m_1 peut être considérée comme valable en général pour tous les q_1.

* NOTE 11.

Cette restriction faite par rapport à la zone neutre où aucune formation de groupe n'a lieu d'aucun côté, on pourra poser

$$\Sigma \frac{a_1}{q_1} \cos \frac{2\pi a_1}{q_1} = \Sigma \frac{a_1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(2\pi \cdot 2(m_1 a_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 a_1)^{\frac{1}{4}}}, \qquad (39)$$

équation où les limites des deux sommes peuvent être déduites des relations entre les deux variables q_1 et m_1.

Posons ensuite $a_1 = \frac{a_2}{q_2}$ et concevons qu'une sommation soit effectuée dans les deux membres par rapport à la variable q_2, supposée parcourir une longue série de nombres successifs. Dans le second membre posons $q_2 = q_2' + y_2$ et

$$\frac{(m_1 a_2)^{\frac{1}{2}}}{(q_2' + k_2)^{\frac{3}{2}}} = m_2,$$

où k_2 est une fraction proprement dite m_2 un nombre entier. On pourra alors, comme précédemment, former le développement

$$2\left(\frac{m_1 a_2}{q_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}} - m_2(y_2 + q_2') + \frac{3}{4}\frac{m_2^2}{(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}}}(y_2 - k_2)^2 - \ldots$$

Ici $m_2(y_2 + q_2')$ est un nombre entier, et par conséquent un groupe se formera autour du terme correspondant à q_2', si m_2^2 est suffisamment petit en comparaison de $(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}}$ et par suite m_2 petit en comparaison de $(m_1 a_2)^{\frac{1}{5}}$. Les termes du groupe étant sommés comme ci-dessus, on obtiendra

$$\Sigma\Sigma \frac{a_2}{q_1 q_2} \cos 2\pi \frac{a_2}{q_1 q_2} = \Sigma\Sigma \frac{a_2}{\sqrt{3}} \frac{\cos\left(2\pi \cdot 3(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}} + 2\frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}}},$$

équation dont la validité peut être étendue comme celle de l'équation (39) à des valeurs de m_2 très grandes, tandis qu'elle cesse de subsister quand m_2 et q_2 approchent de $(m_1 a_2)^{\frac{1}{5}}$.

De cette manière on parviendra sans difficulté à une formule valable en général avec les mêmes restrictions que ci-dessus, savoir

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\Sigma\ldots\frac{1}{q_1q_2\cdots q_p}\cos 2\pi\frac{a_p}{q_1q_2\cdots q_p} \\ &= \Sigma\Sigma\ldots\frac{1}{\sqrt{p+1}}\,\frac{\cos\left(2\pi(p+1)(m_1m_2\ldots m_p a_p)^{\frac{1}{p+1}}+p\frac{\pi}{4}\right)}{(m_1m_2\ldots m_pa_p)^{\frac{p}{2p+2}}}.\end{aligned}\right\}\ (40)$$

Les relations entre les deux systèmes de variables peuvent approximativement être exprimées par

$$\frac{a_1}{q_1^2}=m_1,\quad \frac{(m_1a_2)^{\frac{1}{2}}}{q_2^{\frac{3}{2}}}=m_2,\quad \frac{(m_1m_2a_3)^{\frac{1}{3}}}{q_3^{\frac{4}{3}}}=m_3,\quad \ldots$$

où

$$a_1=\frac{a_2}{q_2},\quad a_2=\frac{a_3}{q_3},\quad \ldots$$

On peut déduire de là les équations approchées

$$m_1q_1=m_2q_2=\ldots=m_pq_p=(m_1m_2\ldots m_pa_p)^{\frac{1}{p+1}}.\ (41)$$

Si l'on en fait application aux sommations indiquées dans la formule (38), on doit poser $p=s-1$ et $a_{s-1}=mx$; mais on doit toutefois remarquer qu'on ne peut, de cette manière, représenter qu'imparfaitement l'expression totale de $\gamma^s(x)$, tant à cause des zones où la formation de groupes cesse en même temps des deux côtés, qu'à cause de la détermination des limites des variables. Cependant, ce qui importe ici, c'est de tenir compte séparément des termes de $\gamma^s(x)$ dont dépend la formation des longues périodes de la série des nombres premiers: et, pour cet objet, c'est surtout la détermination des limites inférieures des nouvelles variables m_1, m_2, ..., qui a de l'importance. Il résulte de l'équation (41), quand on y fait $p=s-1$, et $a_{s-1}=mx$, qu'on a approximativement

$$q_1 q_2 \cdots q_{s-1} = \frac{mx}{(mm_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{1}{s}}}, \tag{42}$$

et d'après (37) la limite supérieure de ce produit est x. Toutes les variables m_1, $m_2 \ldots m_{s-1}$ ont donc 1 pour limite inférieure, tant que m est petit et ne dépasse point la limite $x^{\frac{1}{s-1}}$.

Nous pouvons donc, dans l'expression (38) de $\gamma^s(x)$, choisir une suite de termes qui peuvent être transformés en une somme s-uple

$$\Sigma\Sigma \ldots \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\cos\left(2\pi \cdot s(mm_1 \ldots m_{s-1}x)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(mm_1 \ldots m_{s-1}x)^{\frac{s-1}{2s}}}, \tag{43}$$

où toutes les variables parcourent la série des nombres, depuis 1 jusqu'à certaines limites que nous ne déterminerons pas.

Si nous cherchons ensuite à déterminer la série correspondante de $G^s(x)$, nous poserons d'abord

$$G^s(x) = \sum_{x'=x_0}^{x'=x} \gamma^s(x') + G^s(x_0 - 1),$$

où x_0 et x peuvent être considérés l'un et l'autre comme des nombres très grands; et, si nous remplaçons ici $\gamma^s(x')$ par l'expression (43), nous pourrons effectuer, au lieu de la sommation par rapport à x', une intégration dont le résultat est facile à obtenir approximativement, en remarquant que toutes les valeurs que parcourt x' sont de grands nombres. Prise séparément, cette partie de $G^s(x)$ qui dépend de x, peut être exprimée par * * NOTE 12.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\pi\sqrt{s}} \Sigma\Sigma \ldots \frac{\sin\left(2\pi \cdot s(mm_1 \ldots m_{s-1}x)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(mm_1 \ldots m_{s-1}x)^{\frac{s+1}{2s}}}. \tag{44}$$

La forme de cette expression est identique, sauf le facteur $\frac{1}{2}$, à celle de X_s^s que nous avons trouvée dans l'équation (24). Dans les deux cas, 1 est la limite inférieure de toutes les s variables; mais la ressemblance ne va pas plus loin, les deux développements représentant deux fonctions périodiques différentes, quoique d'une grande affinité.

Comme on a, eu égard à la série (9),

$$A^s(x) = G^s(x) - \frac{s}{1} G^{s-1}(x) + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} G^{s-2}(x) - \ldots + (-1)^s,$$

on peut facilement obtenir un développement de $\vartheta(x)$ analogue à (10), de la forme

$$\vartheta(x) = -b_0 + b_1 \frac{G^1(x)}{1} - b_2 \frac{G^2(x)}{2} + \ldots \pm b_{s_1} \frac{G^{s_1}(x)}{s_1},$$

$$s_1 > \frac{\log x}{\log 2} - 1.$$

Si l'on y porte l'expression de $G^s(x)$ donnée par (44), on obtiendra la partie correspondante de $\vartheta(x)$. Comme on le verra facilement, la discussion ultérieure de cette expression sera essentiellement la même que précédemment; le résultat sera pareillement de constater l'existence de grandes périodes ayant $\log x$ comme variable et la période λ définie par l'équation (28). Mais, en ce qui concerne la détermination plus précise des amplitudes et des phases des fonctions périodiques, les mêmes obstacles se présenteront encore ici, quoique sous une forme nouvelle.

J'ai déjà mentionné dans l'introduction que les écarts périodiques entre les nombres de nombres premiers

trouvés effectivement et ceux qu'on à calculés par la formule de Riemann semblent se développer successivement pour les grands nombres en périodes de plus en plus régulières.

Heureusement, il se trouve que M. le Dr. Gram a traité cette question, d'un point de vue empirique, dans son mémoire cité dans l'introduction. Il s'explique sur cette question de la manière suivante (p. 250):

„Glaisher, pour mieux mettre en évidence la variation des écarts, en a fait une représentation graphique dans un diagramme qu'il a joint à son mémoire. Il y a quelque chose qui pourrait faire soupçonner une période dépendante de ln, en ce sens que la période est à peu près 0,17, $\log_{10} n$ étant pris pour argument, et par conséquent 0,39, ln étant l'argument."

Par une communication verbale M. Gram m'a donné le moyen de compléter cette indication. La fonction périodique étant mise sous la forme

$$\sin 2\pi \left(\frac{\log x}{\lambda} + C\right),$$

M. Gram à déterminé les constantes par une compensation géométrique simple et il a trouvé

$$\lambda = 0{,}39, \qquad C = 0{,}34.$$

Cette formule a bien manifesté des écarts considérables avec le diagramme du neuvième million; mais M. Gram a négligé ces écarts parce qu'il *a soupçonné qu'ils provenaient en partie d'erreurs que contiendraient les tableaux des nombres premiers calculés par Dase*;* en effet, les résultats de ce dénombrement sont difficiles à mettre d'accord avec le calcul du nombre des nombres

* NOTE 13.

premiers jusqu'à 10 millions fait par Meissel. Au contraire, la formule a mis en évidence une grande concordance avec le diagramme de 3 jusqu'à 8 millions.

Enfin, après avoir calculé les écarts avec la formule de Riemann pour la série des nombres premiers correspondante à l'intervalle de $\log x = 0{,}1$ jusqu'à $\log x = 15$ ($x = 3269017$) M. Gram est parvenu au résultat suivant: „Que l'apparente distribution régulière des grands maxima et minima du diagramme de Glaisher est vraisemblablement dûe à un accident."

Tant que la tentative de déterminer les périodes ne comportait que des tâtonnements, nécessités par les données relativement peu nombreuses qu'on possédait et dont une partie, en outre, était entachée du soupçon d'inexactitude, il pouvait sembler sage de renoncer à cette tentative. Heureusement, M. Gram a fait connaître les résultats de ses essais de compensation; et l'on reconnaît à présent, à la lumière de la théorie, que la double conjecture d'après laquelle on devait prendre $\log x$ pour l'argument et 0,39 pour la valeur de la période, était essentiellement correcte et qu'une discussion ultérieure des matériaux empiriques dont nous disposons jusqu'ici est tout à fait superflue. La circonstance même que les longues périodes régulières s'effacent, si x ne dépasse pas une certaine limite inférieure, devient une confirmation de la théorie.

Le fondement théorique obtenu est un fort encouragement à poursuivre la détermination exacte du nombre des nombres premiers. Il serait surtout du plus haut intérêt de contrôler le calcul, fait par Dase, du nombre des nombres premiers jusqu'à 9 millions, soit qu'on se

servît de la méthode de Meissel, soit qu'on fît usage d'une méthode analogue. Il importerait aussi de déterminer une suite de points entre 10 et 100 millions, par exemple de 10 en 10 millions. On fournirait de cette manière des matériaux précieux pour la continuation des recherches théoriques.

NOTES.

NOTE 1. On reconnaît facilement qu'on a

$$\beta^s(x) = \alpha^s(x) + \frac{s}{2}\alpha^{s-1}(x) + \frac{s(s-1)}{2\cdot 4}\alpha^{s-2}(x) + \ldots$$

ou, sous forme symbolique, $\beta^s(x) \sim (\alpha + \frac{1}{2})^s(x)$.

On en déduit

$$\alpha^s(x) \sim (\beta - \tfrac{1}{2})^s(x),$$

et par conséquent

$$A^s(x) \sim (B - \tfrac{1}{2})^s(x).$$

NOTE 2. Dans cette note je chercherai à reconstruire le raisonnement de Lorenz sur lequel est fondée la formule (14).

Soit donnée la série

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, \Sigma(1 + 2\sum_1^\infty \cos 2\pi m_1 x)\, dx,$$

où $f(x)$ est une fonction finie et continue entre les limites x_1 et x_2; quelle est la valeur de cette série?

Posons $s_m = 1 + 2\sum_1^m \cos 2\pi m x$; alors on aura, x n'étant pas un entier

$$s_m = \frac{\sin(2m+1)q}{\sin q}, \quad q = \pi x,$$

$$S = \lim_{m=\infty} \int_{x_1}^{x_2} f(x) \frac{\sin(2m+1)q}{\sin q}\, dx,$$

et, si $\frac{f(x)}{\sin q} = \psi(\chi)$, $\psi(x)$ sera encore finie et continue entre les limites x_1 et x_2 si aucun entier n'est compris entre ces limites.

En intégrant par parties, on obtiendra

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)\sin(2m+1)q}{\sin q}\,dx$$

$$= -\left|\frac{f(x)\cos(2m+1)q}{(2m+1)\pi\sin q}\right|_{x_1}^{x_2} + \frac{1}{(2m+1)\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{d\psi(x)}{dx}\cos(2m+1)q\,dx.$$

Par conséquent on aura, si m croît à l'infini,

$$\lim\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)\sin(2m+1)q}{\sin q}\,dx = 0 = S.$$

Si les entiers

$$r,\quad r+1,\quad r+2\ \ldots\ (r+s)$$

sont compris entre les limites x_1 et x_2, on peut diviser l'intégrale de la manière suivante

$$S = \left(\int_{x_1}^{r-\delta} + \int_{r-\delta}^{r+\delta'} + \int_{r+\delta'}^{r+1-\delta_1} \ldots + \int_{r+1-\delta_1}^{r+1+\delta'_1} + \int_{r+s-\delta_s}^{r+s+\delta'_s} \int_{r+s+\delta'_s}^{x_2}\right)\varphi(x)\,dx\,,$$

$$\varphi(x) = f(x)\left(1 + 2\sum_1^\infty \cos 2m_1\pi x\right),$$

les quantités δ étant arbitraires, mais aussi petites qu'on veut.

D'après ce qui précède, les intégrales $\int_{x_1}^{r-\delta}$, $\int_{r+\delta'}^{r+1-\delta_1}$, $\int_{r+1+\delta'_1}^{r+2-\delta_2}\ldots$ s'évanouiront. Reste à déterminer les intégrales

$\int_{r+p-\delta_p}^{r+p+\delta'_p} \varphi(x)\,dx$, p étant un nombre entier compris entre les nombres r et $r+s$. On aura, en remplaçant $r+p$ par r',

$$\int_{r'-\delta_p}^{r'+\delta'_p} \varphi(x)\,dx = \int_{r'-\delta_p}^{r'+\delta'_p} f(x)\,(1+2\sum_1^\infty \cos 2\pi m_1 x)\,dx$$

$$= \int_{-\delta_p}^{+\delta'_p} f(r'+x)\,(1+2\sum_1^\infty \cos 2\pi m_1 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\delta'_p} f(r'+x)\,(1+2\sum_1^\infty \cos 2\pi m_1 x)\,dx$$

$$+ \int_0^{\delta_p} f(r'-x)(1+2\sum_1^\infty \cos 2\pi m_1 x)\,dx.$$

Par des méthodes bien connues on reconnaîtra que les deux intégrales sont égales à $\frac{f(r)}{2}$.

Par conséquent

$$S = f(r)+f(r+1)\ \ldots\ f(r+s),$$

à l'exception des cas où l'une des limites de l'intégrale ou toutes les deux sont égales à des entiers. Dans ces cas les termes correspondants doivent être comptés pour moitié.

Considérons maintenant la formule (14) de Lorenz. Dans ce qui précède, Lorenz dit qu'il cherchera une expression de la puissance s-ième de $\frac{1}{2}+2^r+3^r\ \ldots\ +x^r$. Mais il ne le fait pas et il n'a pas besoin d'une telle expression. Au contraire il trouve par la formule (14) une expression intégrale de

$$B^s(x) = \beta^s(1)+\beta^s(2)\ \ldots\ \beta^s(x),$$

et la remarque d'après laquelle tous les éléments de l'intégrale s-uple qui se trouve au second membre de l'équation (14) s'évanouiront, à moins que

$$\frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{u_2}{u_3} \cdots \frac{u_{s-1}}{u_s}, \quad \frac{u_s}{1}$$

ne soient des entiers, met cette proposition en évidence. C'est pourquoi nous chercherons avec plus de détails à vérifier cette remarque.

Soit donnée une intégrale double

$$\int_1^u du_1 \int_1^{u_1} f(u_1 u_2)\, du_2.$$

Comme on le reconnaît facilement, on peut intervertir l'ordre des intégrations. L'intégrale est une somme double de tous les éléments $du_1 du_2$ multipliés par $f(u_1, u_2)$ sous les conditions que u_1 et u_2 soient tous deux plus grands que 1, que u_1 soit plus grand que u_2 et que u_1 soit plus petit que u. C'est pourquoi l'on aura

$$\int_1^u du_1 \int_1^{u_1} f(u_1, u_2)\, du_2 = \int_1^u du_2 \int_{u_2}^u f(u_1, u_2)\, du_1.$$

On reconnaît de la même manière que

$$\int_1^u du_1 \int_1^{u_1} du_2 \ldots \int_1^{u_{s-1}} f(u_1, u_2 \ldots u_s)\, du_s$$

$$= \int_1^u du_s \int_{u_s}^u du_{s-1} \int_{u_{s-1}}^u du_{s-2} \ldots \int_{u_2}^u f(u_1, u_2 \ldots u_s)\, du_1,$$

et par suite

$$\int_1^u du_1 \int_1^{u_2} \frac{du_2}{u_2} \cdots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_s} \left(1 + 2\Sigma \cos \mu_1 \frac{u_1}{u_2}\right) \cdots \left(1 + 2\Sigma \cos \mu_{s-1} \frac{u_{s-1}}{u_s}\right)$$
$$(1 + 2\Sigma \cos \mu_s u_s)$$
$$= \int_1^u \frac{du_s}{u_s} (1 + 2\Sigma \cos \mu_s u_s) \int_{u_s}^u \frac{du_{s-1}}{u_{s-1}} \left(1 + 2\Sigma \cos \mu_{s-1} \frac{u_{s-1}}{u_s}\right)$$
$$\cdots \int_{u_3}^u \frac{du_2}{u_2} \left(1 + 2\Sigma \cos \frac{\mu_2 u_2}{u_3}\right) \int_{u_2}^u du_1 \left(1 + 2\Sigma \cos \frac{\mu_1 u_1}{u_2}\right).$$

En conséquence de la proposition développée ci-dessus, tous les éléments de la dernière intégrale s'évanouiront, à moins que $\frac{u_1}{u_2}$ ne soit un nombre entier. Dans ce cas l'élément sera égal à u_2 (ou à $\frac{u_2}{2}$, si c'est un élément limite). En conséquence on aura

$$\int_{u_3}^u \frac{du_2}{u_2} \left(1 + 2\Sigma \cos \frac{\mu_2 u_2}{u_3}\right) \int_{u_2}^u du_1 \left(1 + 2\Sigma \cos \frac{\mu_1 u_1}{u_2}\right)$$
$$= \int_{u_3}^u du_2 \left(1 + 2\Sigma \cos \frac{\mu_2 u_2}{u_3}\right)$$

sous la condition que $\frac{u_1}{u_2}$ soit un entier. En continuant de cette manière, on verra que chaque élément de l'intégrale s-uple donnée est égal à zéro, à moins que toutes les fractions

$$\frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{u_2}{u_3} \cdots \frac{u_{s-1}}{u_s}, \quad \frac{u_s}{1}$$

ne soient des entiers. Dans ces cas, les éléments sont égaux à l'unité ou, si ce sont des éléments limites, à une puissance de $\frac{1}{2}$.

Comme on le reconnaît facilement, l'exposant de cette puissance de $\frac{1}{2}$ indique le nombre des fractions $\frac{u_1}{u_2}, \frac{u_2}{u_3} \ldots$ qui sont égales à l'unité. Ces remarques mettent en évidence l'exactitude de la formule (14).

NOTE 3. La démonstration de l'équation (15) met en évidence qu'on peut permuter les trois fonctions f, g, h. Dès lors on peut transporter la somme $2\Sigma \cos \mu_s u_s$, comme toutes les autres sommes, de droite à gauche.

NOTE 4. Les constantes C_n peuvent être définies par l'équation

$$C_n = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{p=\infty} \int_1^p \frac{du}{u} (\log u)^n 2 \Sigma \cos \mu u$$

où p est un entier.

On aura alors $(n > 0)$,

$$C_n = \lim_{p=\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\log^n 2}{2} + \frac{\log^n 3}{3} + \ldots + \frac{\log^n (p-1)}{p-1} + \frac{\log^n p}{2p} - \frac{\log^{n+1} p}{n+1} \right).$$

Comme on le voit facilement, ces valeurs sont, au signe près, les coefficients de la série

$$s\zeta(1-s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots$$

où ζ (la fonction de Riemann) est définie par l'équation

$$\zeta(s) = \lim_{p=\infty} \left(\sum_1^p p^{-s} - \frac{p^{1-s}}{1-s} \right).$$

Ces coefficients ont été calculés par M.M. J.-L.-V.-W. Jensen et Gram. Voir Comptes rendus 1887, tome 104 p. 1157 et Overs. over det kgl. danske Vidensk. Selsk. Forhandlinger 1895, p. 308.

NOTE 5. Si l'on pose

$$z = u\psi(z) + v,$$

où ψ est une fonction donnée, u et v des variables indépendantes, on aura, $f(z)$ étant une fonction arbitraire,

$$f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1 u}{1} + \frac{\lambda_2 u^2}{1\cdot 2} + \frac{\lambda_3 u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

$$\lambda_0 = f(v), \quad \lambda_n = \frac{d^{n-1}(\psi(v)^n f'(v))}{dv^{n-1}}.$$

Pour faire des applications de cette formule, on doit encore chercher le reste; mais, dans ce qui suit, nous supposons que ce reste tend vers zéro pour un nombre croissant de termes.

Nons posons

$$z = -uz + v,$$

$$f(z) = \int_a^z \frac{e^{-2z}}{z} dz, \quad f'(z) = \frac{e^{-2z}}{z}.$$

La série citée de Lagangre nous donnera alors

$$\int_a^z \frac{e^{-2z}}{z} dz = \int_a^v \frac{e^{-2z} dz}{z} - \frac{uve^{-2v}}{v} + \frac{u^2}{1\cdot 2} \frac{d\left(\frac{v^2 e^{-2v}}{v}\right)}{dv}$$
$$- u^3 \frac{d^2\left(\frac{v^3 e^{-2v}}{v}\right)}{dv^2} + \cdots$$

Différentions cette équation par rapport à v; nous obtiendrons ainsi

$$\frac{e^{-2z}}{z}\frac{dz}{dv} = \frac{e^{-\frac{2v}{1+u}}}{v} = \frac{e^{-2v}}{v} - u\frac{d\left(\frac{ve^{-2v}}{v}\right)}{dv} + \frac{u^2}{1\cdot 2}\frac{d^2\left(\frac{v^2 e^{-2v}}{v}\right)}{dv^2}$$
$$- u^3 \frac{d^3\left(\frac{v^3 e^{-2v}}{v}\right)}{dv^3} + \cdots$$

Si nous posons $u = 2C_0$, nous aurons la formule (23) de Lorenz.

NOTE 6. Considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dw\,(v_0 + wi)}{\sqrt{(v_0 + wi)^2 - 1}}\, e^{a(v_0 + wi)i}$$

où a est très grand et où v_0 diffère de l'unité. Alors ce ne sont que les petites valeurs de w qui influent sur la valeur de l'intégrale et nous pouvons sans erreur sensible remplacer l'intégrale donnée par l'intégrale plus simple

$$\frac{v_0 e^{av_0 i}}{\sqrt{v_0^2 - 1}} \int_0^\infty dw\, e^{-aw} = \frac{1}{a} \frac{v_0 e^{av_0 i}}{\sqrt{v_0^2 - 1}}.$$

De la même manière, on peut remplacer

$$\int_0^\infty \frac{dw\,(1 + wi)}{\sqrt{(1 + wi)^2 - 1}}\, e^{a(1 + wi)i}$$

par

$$e^{ai} \int_0^\infty \frac{dw\, e^{-aw}}{\sqrt{2wi}} = -ie^{\left(a + \frac{\pi}{4}\right)i} \sqrt{\frac{\pi}{2a}}.$$

De cette façon on obtient

$$0 = \int_1^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} + \frac{iv_0 e^{av_0 i}}{a\sqrt{v_0^2 - 1}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{\left(a + \frac{\pi}{4}\right)i};$$

mais cette équation n'est pas valable quand v_0 est égal à 1 ou ne diffère que peu de 1. Dans ce cas le membre $\frac{v_0 e^{av_0 i}}{a\sqrt{v_0^2 - 1}}$ de l'équation devient infini, tandis que l'intégrale

$\int_1^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}}$ est égale à zéro; c'est pourquoi l'on ne sait pas si l'expression trouvée peut être appliquée à la sommation approchée de la série qui exprime X_s^s.

NOTE 7. L'indication de Lorenz qu'on doit dans la somme double S_3 négliger les termes qui correspondent à $m_1 = \sqrt{m_1 m_2 u}$ et $m_2 = \sqrt{m_1 m_2 u}$ n'est pas correcte: on ne doit négliger que les termes pour lesquels les dénominateurs s'évanouissent. D'ailleurs Lorenz lui-méme n'a dans les sommations suivantes négligé que ces termes.

NOTE 8. Posons

$$S_p = y_1 + y_2 \ldots y_p;$$

alors, en négligeant tous les termes d'un ordre supérieur au second, nous aurons

$$U = \mu_s u_{s-1} + \mu_{s-1} \frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} + \ldots + \mu_1 \frac{u}{u_1}$$

$$= \nu \left(1 + S_{s-1} + \frac{1+2S_{s-2}}{1+S_{s-1}} + \frac{1+3S_{s-3}}{1+2S_{s-2}} + \ldots + \frac{1+(s-1)S_1}{1+(s-2)S_2} + \frac{1}{1+(s-1)S_1} \right)$$

$$= \nu \left(\begin{matrix} s-1 \cdot 2 S_{s-2} S_{s-1} & -2 \cdot 3 S_{s-3} S_{s-2} \ldots & -(s-2)(s-1) S_1 S_2 \\ +1^2 \cdot S_{s-1}^2 & +2^2 \cdot S_{s-2} & +(s-1)^2 S_1^2 \end{matrix} \right)$$

Si l'on porte dans la seconde série $S_p^2 = (y_p + S_{p-1}) S_p$, $p = s-1, s-2 \ldots$, on aura

$$U = \nu (s + S_{s-1}(y_{s-1} - S_{s-2}) + 2 S_{s-2}(2 y_{s-2} - S_{s-3}) \ldots (s-1)^2 y_1^2).$$

Ici l'on pose $S_{s-1} = y_{s-1} + S_{s-2}$, d'où

$$U = \nu (s + y_{s-1}^2 + S_{s-2}(4 y_{s-2} - S_{s-2} - 2 S_{s-3}) + \ldots).$$

Dans cette expression on pose $S_{s-2} = y_{s-2} + S_{s-3}$, d'où

$$U = \nu (s + y_{s-1}^2 + 3 y_{s-2}^2 + 3 S_{s-3}(3 y_{s-3} - S_{s-3} - S_{s-4}) + \ldots).$$

En continuant de cette manière on obtiendra l'expression de Lorenz.

NOTE 9. M. J.-P. Gram m'a communiqué qu'il existe une certaine relation entre les valeurs de y trouvées ici et les racines de $\xi(t) = 0$, ξ étant la fonction de Riemann. Voici la communication de M. Gram.

L'équation

$$2e^y(1-y) + \tfrac{1}{4} = 1 - 2p$$

met en évidence que $2\pi e^y$ doit approximativement être égal à l'une des racines, a, de $\xi(t) = 0$, puisque le nombre des racines égales à N ou plus petites que N est égal à

$$\frac{N}{2\pi}\left(\log\frac{N}{2\pi} - 1\right) + \frac{5}{4} + \varepsilon$$

(cfr. la note de M. Gram, Vidensk. Selsk. Overs. 1902, p. 13. Note sur les zéros de la fonction $\xi(s)$ de Riemann).

Les valeurs calculées de y (p. 556) donneront

$2\pi e^y =$	14,521	tandis que $a =$	14,135
	20,655		21,022
	25,492		25,011
	29,739		30,425.

Les valeurs de y (p. 557) donneront

$2\pi e^y =$	13,543
	19,987
	24,927
	29,231.

C'est vraisemblablement inexact quand Lorenz suppose qu'il ait trouvé les limites de λ. Il est vraisem-

blable que son y doit être précisément égal à $\log \frac{a}{2\pi}$. S'il en est ainsi, le développement de Lorenz met en évidence le fait intéressant qu'il traite les racines α de $\xi(t) = 0$ sans recourir aux fonctions ξ en indiquant leur importance — à son point de vue, bien entendu, — pour la partie périodique de $\vartheta(x)$.

NOTE **10**. L'équation (35) n'est pas juste, à moins que $\dfrac{\sin 2\pi \frac{m(x+\frac{1}{2})}{q}}{\sin \pi \frac{m}{q}}$ ne soit égal à $2(x+\frac{1}{2})$ pour $m = q$. C'est ce qu'on reconnaît de la manière suivante.

Si l'on pose

$$S = \sum_{m=1}^{m=q-1} \frac{\sin \frac{2\pi m(x+\frac{1}{2})}{q}}{2q \sin \frac{\pi m}{q}},$$

on aura

$$S = \frac{1}{q} \sum_{m=1}^{m=q-1} \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi m}{q} + \cos \frac{2 \cdot 2\pi m}{q} \ldots \cos \frac{2x\pi m}{q}\right),$$

et

$$\sum_{m=1}^{m=q-1} \cos \frac{2 \cdot r m \pi}{q} = q - 1$$

si q est un facteur de r, tandis qu'on aura dans le cas contraire

$$\sum_{m=1}^{m=q-1} \cos \frac{2 r m \pi}{q} = -1.$$

Par conséquent

$$S = \frac{1}{q}\left(\frac{q-1}{2} - x + q E\left(\frac{x}{q}\right)\right) = \frac{1}{2} + E\left(\frac{x}{q}\right) - \frac{1}{q}(x+\tfrac{1}{2}).$$

NOTE II. On pose $m_1 = m'_1 + z$, où

$$m'_1 = \frac{a_1}{(q_1+k_1)^2} = \frac{a_1}{q_1^2} - \frac{2a_1k_1}{q_1^3} + \dots$$

Si k_1 est très petit en comparaison de q_1, on peut dans la série m'_1 négliger les termes suivants et poser

$$\sqrt{m_1 a_1} = \sqrt{\frac{a_1^2}{q_1^2} - \frac{2a_1^2k_1}{q_1^3} + za_1}$$

$$= \frac{a_1}{q_1} + \frac{1}{2}q_1\left(z - \frac{2a_1k_1}{q_1^3}\right) - \frac{1}{8}\frac{q_1^3}{a_1}\left(z - \frac{2a_1k_1}{q_1^3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a_1}{q_1} + \frac{1}{2}q_1(z+m'_1) - \frac{1}{8}\frac{q_1^3}{a_1}\left(z - \frac{2a_1k_1}{q_1^3}\right)^2.$$

On aura donc avec une certaine approximation, $z + m'_1$ étant un nombre entier,

$$\frac{a_1}{\sqrt{2}}\frac{\cos\left(2\pi\cdot 2(m_1a_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{(m_1a_1)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{a_1}{\sqrt{2}}\frac{\cos 2\pi\left(\frac{a_1}{q_1} - \frac{1}{4}\frac{q_1^3}{a_1}\left(z - \frac{2a_1k_1}{q_1^3}\right)^2 + \frac{1}{8}\right)}{\sqrt{\frac{a_1}{q_1}}}.$$

Si l'on prend la somme d'un grand nombre de pareilles expressions et si l'on remplace la somme par une intégrale (de $-\infty$ à $+\infty$), on obtiendra

$$\Sigma\frac{a_1\cos\left(2\pi\cdot 2(m_1a_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}(m_1a_1)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{\sqrt{q_1a_1}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos 2\pi\left(\frac{a_1}{q_1} - \frac{1}{4}\frac{q_1^3}{a_1}z^2 + \frac{1}{8}\right)dz = \frac{a_1}{q_1}\cos\frac{2\pi a_1}{q_1}.$$

Je suppose que c'est de cette manière que Lorenz a prouvé son hypothèse.

Comme on le voit, le procédé ne met pourtant pas en évidence le degré d'exactitude du résultat obtenu.

NOTE 12. Lorenz dit qu'on peut approximativement poser

$$G^s(x) = \Sigma\Sigma\ldots \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{x_0}^{x} \frac{\cos\left(2\pi s(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{s-1}{2s}}} dx$$

$$+ G^s(x_0 - 1).$$

Mais on aura

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \int_{x_0}^{x} \frac{\cos\left(2\pi s(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{s-1}{2s}}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{x}{\sqrt{s}} \frac{\sin\left(2\pi s(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{s+1}{2s}}} + C$$

$$- \frac{(s-1)}{2\pi \cdot 2s\sqrt{s}} \int_{x_0}^{x} \frac{\sin\left(2\pi s(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(m m_1 \ldots m_{s-1} x)^{\frac{s+1}{2s}}} dx$$

où C est indépendant de x.

Dans cette expression, le dénominateur de la dernière intégrale est très grand en comparaison de celui de l'intégrale proposée; aussi cette intégrale peut-elle être négligée. De cette manière on obtient l'expression (44).

NOTE 13. Voir la note de M. Gram: Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers. Acta mathem., tome 17, p. 301—314; 1893.

La revision faite par M. Bertelsen des tableaux de Dase confirme complètement la supposition de M. Gram.

BIBLIOTHÈQUE VANIER
UNIVERSITÉ D'OTTAWA

Échéance

Celui qui rapporte un volume après la dernière date timbrée ci-dessous, devra payer une amende de dix cents, plus deux cents pour chaque jour de retard.

VANIER LIBRARY
UNIVERSITY OF
OTTAWA

Date due

For failure to return a book on or before the last date stamped below there will be a fine of ten cents, and an extra charge of two cents for each additional day.

a39003 006471196b

U D' / OF OTTAWA
COLL ROW MODULE SHELF BOX POS C
333 12 05 04 14 07 7